

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ

Предлагаются формы решения для термоупругого потенциала перемещений и решения двумерной нестационарной задачи теплопроводности в вариационной постановке. Подход к решениям основан на методе разделения переменных и представлении координатных функций в виде отрезков рядов по ultrasферическим многочленам.

Ключевые слова: базисные функции, многочлены Чебышева, задача теплопроводности, граничные условия, система линейных алгебраических уравнений.

Введение

Перемещения U^T в упругом теле, обусловленные полем температур, могут быть определены [1] как $U^T = \text{grad}\varphi$, где функция φ – термоупругий потенциал перемещений. Определение этой функции по известному распределению температуры Θ в теле является одним из основных моментов решения задачи термоупругости и находится как решение уравнения Пуассона, которое для случая плоского напряженного состояния имеет вид [1]

$$\nabla^2 \varphi = (1 + \nu)\alpha_T \Theta,$$

где ν и α_T – коэффициенты Пуассона и линейного расширения, соответственно.

Задача определения термоупругого потенциала может быть сведена к нахождению последовательности функций φ_n и Θ_n таких, что

$$\nabla^2 \varphi_n = c_n \Theta_n, \quad (1)$$

Представление соответствующих решений в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^N b_n \varphi_n, \quad \Theta = \sum_{n=0}^N a_n \Theta_n \quad (2)$$

позволяет определить потенциал φ непосредственно путем сравнения коэффициентов в (2).

Известно решение (1) для задач с осевой симметрией, когда поле температур и термоупругий потенциал представляются соответственно через функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка [1].

В работе [2] предложен метод решения нестационарных задач математической физики в вариационной постановке, основанный на разделении переменных. Искомое решение представляется отрезками рядов по известным базисным функциям, коэффициенты при

которых являются неизвестными функциями времени. В каждый момент времени эти коэффициенты считаются варьируемыми параметрами. Из необходимого условия экстремума получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени. В [3] этот метод применен для решения задач, обладающих осевой симметрией, при этом базисные функции непосредственно подбирались из условия удовлетворения граничным условиям. В данной работе, исходя из общих свойств ultrasферических многочленов, строятся последовательности базисных функций, связанных соотношением (1), которые позволяют удовлетворить граничным условиям задачи теплопроводности в общем случае.

Представление базисных функций

Функция $p_n = r^n f_n(t_\alpha)$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $t_\alpha = \frac{\alpha}{r}$, $\alpha = x, y$, будет решением уравнения Лапласа

$$\nabla^2 p_n = r^{n-2} \left[(1-t^2)f_n'' - t f_n' + n^2 f_n \right] \quad (3)$$

если выражение в квадратных скобках обращается в ноль

$$(1-t^2)f_n'' - t f_n' + n^2 f_n = 0.$$

Последнее соотношение представляет собой дифференциальное уравнение для полиномов Чебышева первого рода $T_n(t)$. Эти полиномы являются предельным частным случаем для ultrasферических многочленов $P_n^{(\lambda)}$ при $\lambda = 0$ и определяются как [4]

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} P_n^{(\lambda)} = \frac{2}{n} T_n(t). \quad (4)$$

Ультрасферические многочлены $P_n^{(\lambda)}(t)$ [4] удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-t^2)\frac{d^2}{dx}P_n^{(\lambda)}(t) - (2\lambda+1)t\frac{d}{dx}P_n^{(\lambda)}(t) + n(n+2\lambda)P_n^{(\lambda)}(t) = 0 \quad (5)$$

и для них имеет место рекуррентная формула

$$nP_n^{(\lambda)}(t) = 2(n+\lambda-1)tP_{n-1}^{(\lambda)}(t) + n(n+2\lambda)P_{n-1}^{(\lambda)}(t), \\ P_0^{(\lambda)}(t) = 1, \quad P_1^{(\lambda)}(t) = 2\lambda t. \quad (6)$$

Справедливы следующие соотношения между смежными полиномами и их производными

$$(1-t^2)\frac{d}{dt}P_n^{(\lambda)}(t) = -nP_n^{(\lambda)}(t) + (n+2\lambda-1)P_{n-1}^{(\lambda)}(t) = \quad (7)$$

$$= (n+2\lambda)tP_n^{(\lambda)}(t) - (n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(t) = \quad (8)$$

$$= 2\lambda(1-t^2)P_{n-1}^{(\lambda+1)}(t), \quad (9)$$

$$(n+\lambda)P_n^{(\lambda)}(t) = \lambda[P_{n+1}^{(\lambda+1)}(t) - P_{n-1}^{(\lambda+1)}(t)]. \quad (10)$$

Введем функцию

$$\Phi_{n\lambda} = r^n(1-t^2)^\lambda P_{n-2\lambda}^{(\lambda)} \quad n=0,1,\dots \quad (11)$$

и применим к ней оператор Лапласа. После цепочки преобразований с учетом последовательного применения соотношений (3), (5), (7), (6), (10) получаем

$$\nabla^2 \Phi_{n\lambda} = (n-1)(n-2)\frac{2\lambda}{2(\lambda-1)}r^{n-2}(1-t^2)^{\lambda-1}P_m^{(\lambda-1)}, \quad (12)$$

Следует отметить, что если функцию $\Phi_{n\lambda}$ представить в виде

$$\Phi_{n\lambda} = \frac{1}{(n-1)!}r^n(1-t^2)^\lambda P_{n-2\lambda}^{(\lambda)} \quad (13)$$

и учесть (7), то будут выполняться рекуррентные соотношения для производных

$$\frac{\partial \Phi_{n\lambda}}{\partial \alpha} = \Phi_{n-1\lambda}, \quad \alpha = x, y; \quad t = \frac{\alpha}{r}, \quad (14)$$

а формула (12) примет вид

$$\nabla^2 \Phi_{n\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda-1}\Phi_{n-2\lambda-1}. \quad (15)$$

Таким образом, получено, что функции, определенные соотношением (11), удовлетворяют уравнению (1).

Рассмотрим три функции, которые получаются из (13) при частных значениях параметра λ .

1) Как отмечено выше, при $\lambda = 0$ многочлены $P_n^{(\lambda)}$ являются полиномами Чебышева первого рода $T_n(t)$ и гармоническая функция согласно (13) и с учетом предельного перехода (4) будет иметь вид

$$p_n(t) = \frac{1}{n!}r^n T_n. \quad (16)$$

2) Для случая $\lambda = 1$ определим согласно (13) функцию

$$g_n(t_x) = \frac{1}{(n-1)!}(1-t_x^2)r^n U_{n-2}(t_x), \quad (17)$$

где $U_n(t) = P_n^{(1)}(t)$ – полиномы Чебышева второго рода. Следует отметить, что при таком λ значение выражения (12) неопределенно. Используя предельный переход (4) получаем, что формула (10) устанавливающая связь между $P_n^{(1)}(t)$ и $P_n^{(0)}(t)$ будет иметь вид $2T_n(t) = U_n(t) - U_{n-2}(t)$, а соотношение (15) запишется как

$$\nabla^2 \Phi_{n1} = \nabla^2 g_n = 2p_{n-2}. \quad (18)$$

3) Введем для полиномов $P_n^{(\lambda)}$ при $\lambda = 2$ обозначение $K_n(t) = P_n^{(2)}$, и образуем из (13) функцию

$$f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}r^n(1-t^2)^2 K_{n-4}(t), \quad (19)$$

для которой согласно (12)

$$\nabla^2 f_n = 2g_{n-2}. \quad (20)$$

Таким образом, получаем, что если решение для температур ищется в виде отрезка ряда $\Theta = \sum_{n=0}^N a_n P_n$,

то термоупругий потенциал задается как

$$\Phi = \beta \sum_{n=0}^N a_{n+2} g_{n+2}, \quad \text{а для представления } \Theta = \sum_{n=2}^N b_n g_n \text{ по-}$$

$$\text{лучим } \Phi = \beta \sum_{n=2}^N b_{n+2} f_{n+2}, \quad \text{где } \beta = \frac{1}{2}(1+\nu)\alpha_T.$$

Решение задачи теплопроводности

Рассмотрим задачу нестационарной теплопроводности, которая состоит в определении температуры $\Theta(x, y, t)$ в некоторой двумерной области Ω для произвольного момента времени $t > t_0$.

Функция Θ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \nabla^2 \Theta \quad (21)$$

краевым условиям на части границы тела Γ_T

$$\Theta|_{\Gamma_T} = F, \quad (22)$$

на части границы тела Γ_q

$$-\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{n}}|_{\Gamma} = q \quad (23)$$

и начальному условию

$$\Theta(x, y, \tau_0) = \Theta_0. \quad (24)$$

Уравнение (21), граничные условия (22), (23) и начальное условие (24) записаны в безразмерной форме [5]

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \tau = t \frac{\lambda}{L^2 c \rho}, \bar{\Theta} = (\Theta - \Theta_*) / \Theta_*, \bar{q} = \frac{qL}{\lambda \Theta_*}.$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность вещества тела, L – характерный размер тела, \bar{n} – направление внутренней нормали к границе, Θ_* – температура окружающей среды, F, q, Θ_0 – заданные функции.

Решение ищется в виде

$$\Theta = \sum_{k=0}^K a_k(\tau) \Theta_k, \quad (25)$$

где Θ_k – выбранные определенным образом базисные функции. После приближенной замены производной по времени при помощи правой разности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\Delta \tau} \left[\sum_{n=0}^K a_k(\tau_i) \Theta_k - \sum_{n=0}^K a_k(\tau_{i-1}) \Theta_k \right] \quad (26)$$

задача сводится к определению функций $a_k(\tau_i)$ для фиксированного значения времени τ_i . Здесь $\Delta \tau$ – шаг по времени, $\tau_i = \tau_{i-1} + \Delta \tau$, i – номер временного слоя.

Значение коэффициентов $a_k(\tau_i)$, предполагаются известными из решения задачи для момента времени τ_{i-1} .

Образует базис из функций $p_n(t)$ и $g_n(t)$, $t = t_x, t_y$, определенных соотношениями (16), (17) т.е. из гармонических и бигармонических функций. Необходимо отметить, что из рекуррентных формул для полиномов Чебышева первого и второго рода следует, что функции $p_{2m}(t_x)$ и $p_{2m}(t_y)$ являются линейно зависимыми

$$p_{2m}(t_x) = -\frac{1}{2m} [g_{2m}(t_x) + (-1)^m g_{2m}(t_y)] \quad m = 1, 2, \dots$$

и в решение включаться не могут. Определим, набор базисных функций в решении (25) как

$$\Theta_0 = 1 = p_0, \quad \Theta_{k+1} = p_{2k+1}(t_x), \quad \Theta_{m+1} = p_{2k+1}(t_y) \quad (27)$$

$k = 0, 1, \dots, \tilde{N}$, $m = k + \tilde{N} + 2$, $\tilde{N} = \left[\frac{N+1}{2} \right]$ – результат деления нацело.

$$\Theta_i = q_k(t_x), \quad \Theta_j = q_k(t_y), \quad k = 2, 3, \dots, N, \quad j = i + N - 1. \quad (28)$$

В эквивалентной вариационной постановке задача (21)–(24) сводится к поиску решения (25), которое доставляет минимум функционалу [5]

$$J = \int_{\Omega} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \Theta)^2 d\Omega - \int_{\Gamma} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial n} d\Gamma, \quad (29)$$

при этом предполагается, что граничные условия для температуры выполнены.

Условие минимума функционала (29)

$$\frac{\partial J}{\partial a_m} = 0$$

позволяет составить систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_m(\tau)$.

При дифференцировании первого слагаемого в (29)

по a_m , считается, что производная $\frac{\partial a_k}{\partial \tau}$ варьированию не подлежит. В результирующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_k A_{mk} a_k = B_m \quad (30)$$

коэффициенты матрицы и вектор правых частей вычисляются соответственно как

$$A_{mk} = \tilde{A}_{mk} + \Delta \tau \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Theta_m}{\partial x} \frac{\partial \Theta_k}{\partial x} + \frac{\partial \Theta_m}{\partial y} \frac{\partial \Theta_k}{\partial y} \right) d\Omega,$$

$$\tilde{A}_{mk} = \int_{\Omega} \Theta_m \Theta_k d\Omega, \quad B_m = \Delta \tau \int_{\Gamma} q \Theta_m d\Gamma + \sum_k a_k(\tau) \tilde{A}_{mk}.$$

Описанный метод был применен для решения нескольких задач. В первой задаче была рассмотрена пластина в форме единичного квадрата $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ с начальным условием $\Theta(0, x, y) = 0$ и граничными условиями $q(0, y) = 1$, $q(x, 0) = 1$, $q(1, y) = 0$, $q(x, 1) = 0$. На рис. 1 приведено распределение температуры по пластине для моментов времени $\tau = 0,1$ и $\tau = 0,5$.

Сравнение результатов, полученных данным методом и при помощи метода переменных направлений (МПН) показывает, что отличие составляет не более 2%. Сопоставление проводилось при значении шага по времени $\Delta \tau = 0,01$, а параметр сетки в МПН был принят равным 0,02.

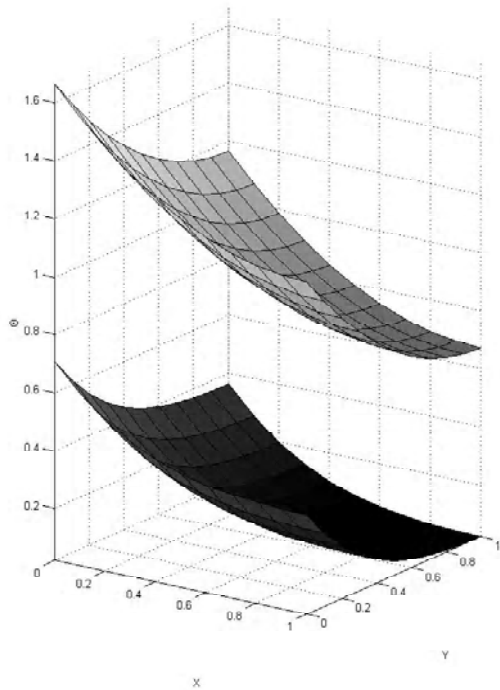


Рис. 1.

Если на части поверхности тела Γ_T заданы краевые условия в форме (22), т. е. $\Theta(\bar{r}, \tau) = F(\bar{r}, \tau)$, то выполнение этих условий может быть удовлетворено в смысле наименьших квадратов. В этом случае элементы матрицы и вектора правых частей результирующей СЛАУ получаются суммированием взятых с некоторыми весовыми коэффициентами соответствующих величин в (30) и определенных, согласно методу наименьших квадратов элементов матрицы и вектора правых частей

$$A_{mk}^T = \int_S \Theta_m \Theta_k dS, \quad B_m^T = \int_S \Theta_m F dS.$$

Определения весовых коэффициентов может быть построено в виде итерационного процесса. С другой стороны, граничные условия для температуры в точке границы p_0 $\Theta(\tau_i, p_0) = \Theta_0(p_0)$ могут быть приближенно заменены условиями для потока

$$q(p_0) = \frac{1}{h} (\Theta_0(p_0) - \Theta(p_0 - h)), \quad (31)$$

где точка $p_0 - h$ находится внутри тела на расстоянии h от p_0 , измеряемого по нормали к границе.

При помощи такого подхода была решена задача определения температурного поля квадратной пластины с начальным условием $\Theta(0, x, y) = 1 + x^2 + y^2$. На краях $x = 0$ и $x = 1$ заданы условия теплоизоляции $q = 0$, на сторонах $y = 0$ и $y = 1$ – фиксирова-

лась температура начального условия. Значение параметра h в (31) было принято равными 0,1. Характер изменения температуры для моментов времени, $\tau = 0,04$ (верхняя поверхность) и $\tau = 0,5$ (нижняя) показан на рис. 2.

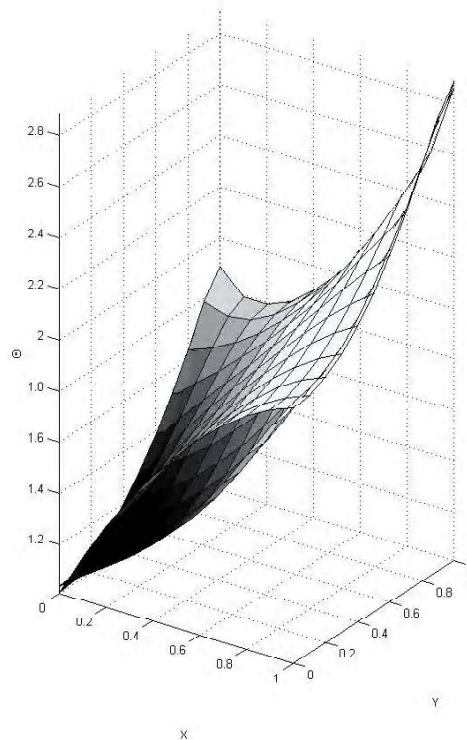


Рис. 2.

В этом случае максимальное отличие результатов от полученных МПН, имеет место в угловых точках, где составляет величину порядка 5%. На рис. 3, а приведено распределение температур в сечении $y = 1$. Соответствующее относительное отклонение между двумя решениями для этого случая показано на рис. 3, б.

В третьей задаче была рассмотрена эллиптическая пластина с полуосями эллипса $a = 1, b = 0,5$ с начальным условием $\Theta(0, x, y) = 0$ и граничными условиями $q(\varphi) = 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, \theta(\tau, \varphi) = \tau, \pi \leq \varphi \leq 2\pi$.

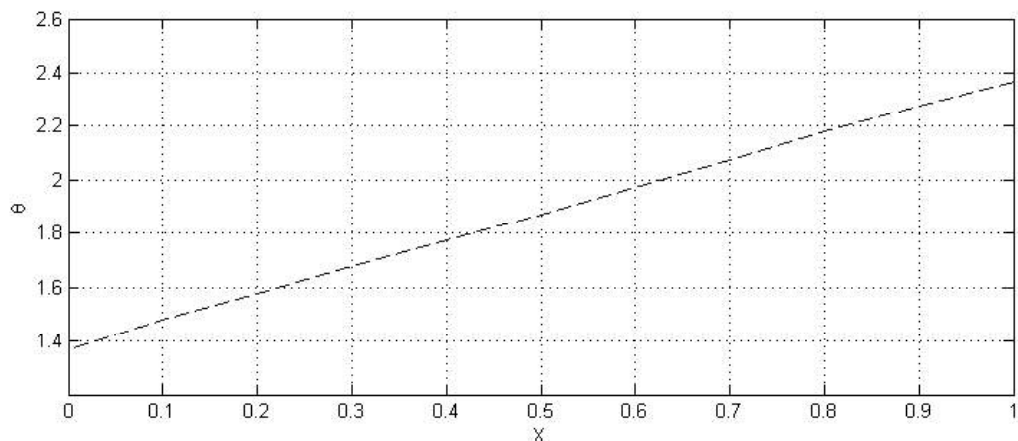
Характер изменения функции температуры в этой задаче для моментов времени $\tau = 0,2$ и $\tau = 0,5$ приведены на рис. 4 и рис. 5 соответственно.

Для первой и третьей задач длина базиса в (28) была принята $N = 12$, что соответствует СЛАУ с 39 неизвестными. Для второй задачи значения этих параметров были приняты равными 18 и 57 соответственно. Решение всех трех проводилось при значениях шага по времени $\Delta\tau = 0,01; 0,02$ и $0,05$. Следует отметить, что результаты, соответствующие различным значениям этого параметра, между собою практически не отличаются.

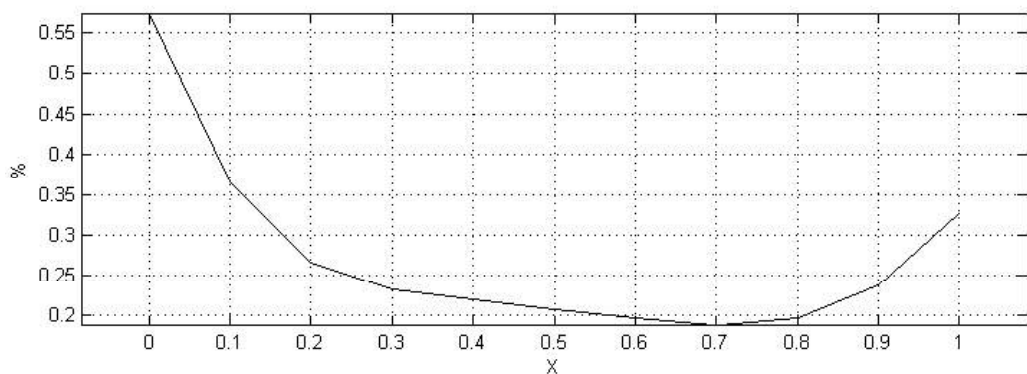
Выводы

Таким образом, получено, что предлагаемая форма базисных функций позволяет с достаточной степенью точности получить решение задачи теплопровод-

ности для различных случаев граничных условий, а значит определить температурные перемещения и напряжения в упругом теле.



а



б

Рис. 3.

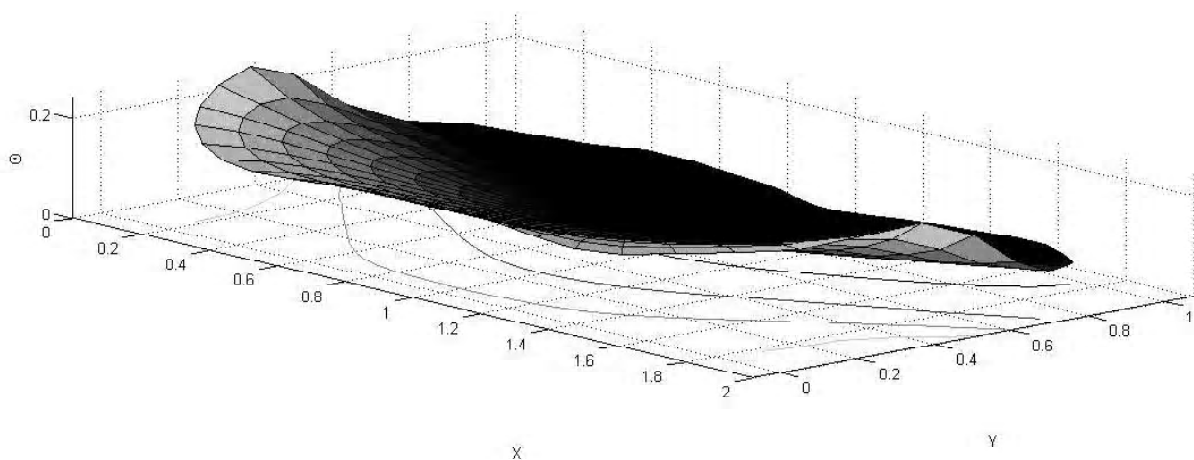


Рис. 4.

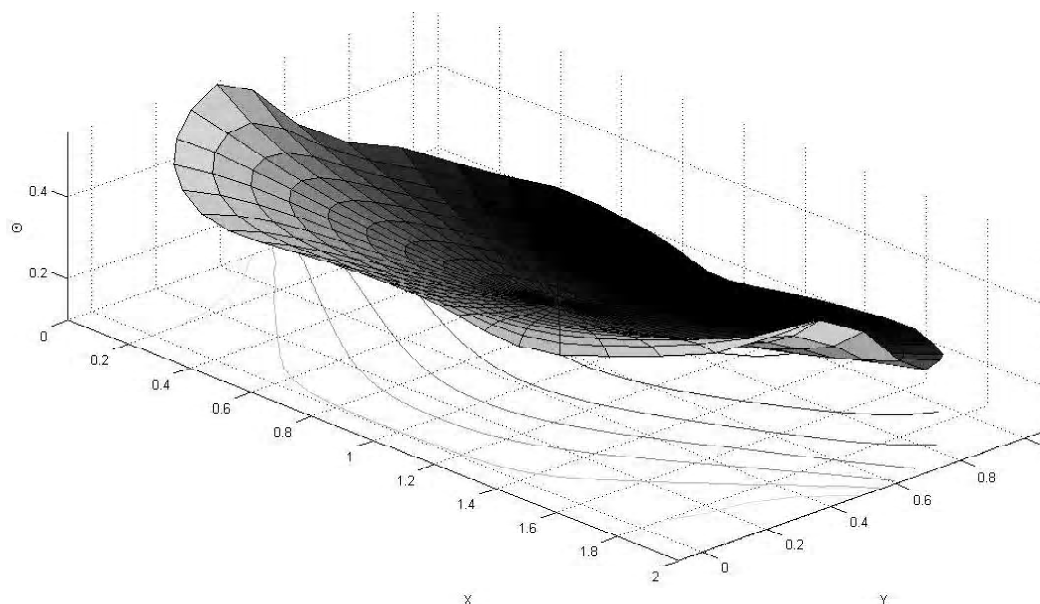


Рис. 5.

Список литературы

1. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. – К. : Издательское объединение «Вища школа», 1975. – 216 с.
2. Колмогоров В.Л. Метод расчета напряженно-деформированного состояния в общей краевой задаче развитого течения / В. Л. Колмогоров // Вестник ПГТУ. Механика. – 1995. – № 2. – С. 87–98.
3. Колмогоров В. Л. Решение нестационарных температурных и термомеханических задач методом разделения переменных в вариационной постановке / [В. Л. Колмогоров, В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак и др.] // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. : Физ.-мат. науки. – 2006. – № 42. – С. 72–75.
4. Сеге Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 500 с.
5. Беляев Н. М. Методы теории теплопроводности. Ч. 1. / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. –М. : Высш. школа, 1982. – 327 с.

Одержано 29.12.2010

Заяц В. І., Новікова О.С. Представлення рішення двовимірної задачі термопружності в ультрасферичних багаточленах

Пропонуються форми рішення для термопружного потенціалу переміщень та рішення двовимірної нестационарної задачі теплопровідності у варіаційній постановці. Підхід до рішень ґрунтується на методі відокремлення змінних і подання координатних функцій у вигляді відрізків рядів по ультрасферичних багаточленах.

Ключові слова: базисні функції, многочлени Чебишева, задача теплопровідності, граничні умови, система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Zayats V., Novikova O. Dimensional problem of thermoelasticity in ultraspherical polynomials solution

Forms of solution for the thermoelastic displacement potential and the solution of two-dimensional unsteady heat conduction problem in the variational formulation are offered. The solutions are based on the variables separation method and the coordinate functions representation in form of series of ultraspherical polynomials segments.

Key words: basis functions, Chebyshev polynomials, the problem of heat conduction, boundary conditions, the system of linear algebraic equations.