

УДК 539.3

Д-р техн. наук А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина

Государственная инженерная академия, г. Запорожье

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БАЛКЕ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛИ

Рассматривается процесс распространения нестационарных волн в балке прямоугольного сечения при ее изгибе на основе уточненных уравнений [1] для случая внезапно приложенного изгибающего момента. Приведены соответствующие графики изгибающего момента. В отличие от известных ранее уравнений [2], скорости распространения фронтов продольных и поперечных волн совпадают со скоростями аналогичных волн в теории упругости.

Ключевые слова: асимптотико-групповой анализ, уточненные динамические уравнения изгиба балки, квазифронт, изгибающий момент, изгибная волна.

Введение

Уравнения динамики стержней получаются обычно на основе каких-то предположений о характере распределения искомых величин – напряжений и деформаций по поперечному сечению стержня [3]. В случае свободных колебаний все величины считаются постоянными по сечению стержня. Ранее в работе [4] было показано, как известные динамические уравнения продольной деформации стержня получаются из трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа, не требующего использования каких-либо гипотез. Однако в динамических задачах существенную роль могут играть некоторые факторы, которые не учитываются классическими уравнениями, например, поперечные колебания стержня, возникающие при движении продольной волны. В [1] аналогично производится поиск уточненных одномерных динамических уравнений изгиба стержня на основе трехмерных уравнений теории упругости. Таким образом, получаются асимптотически обоснованные уточненные уравнения, позволяющие учитывать как известные в изгибе балки эффекты, так и некоторые новые. В данной работе показано решение этих уравнений, а также проанализирован процесс распространения нестационарных волн по стержню прямоугольного сечения при его изгибе на основе уточненных решений.

Решение найденных уточненных динамических уравнений изгиба балки для случая внезапно приложенного изгибающего момента

В работе [1] изложена процедура получения уточненных динамических уравнений изгиба балки на основе трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа. При этом реализовано, так называемое, неминимальное

упрощение трехмерных уравнений, приводящее к одномерным уравнениям.

Перепишем полученные в [1] уравнения в однородном случае, отвечающем отсутствию нагрузок на боковых поверхностях балки:

$$\partial_x^2 \varphi + c \partial_x W + c \partial_x V - 8a_s^2 (\partial_x w + \varphi) - \partial_t^2 \varphi = 0;$$

$$a_s^2 \partial_x^2 w + (a_s^2 + c) \partial_x \varphi + W + cV - \partial_t^2 w = 0;$$

$$8a_s^2 \partial_x^2 w + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \varphi + 24(W + cV) + \partial_t^2 W = 0;$$

$$8(V + c \partial_x \varphi + cW) + \varepsilon \partial_t^2 V = 0;$$

$$Q = \partial_x w + \varphi, \quad M = \partial_x \varphi + cW + cV;$$

$$N = W + c \partial_x \varphi + cV; \quad K = V + c \partial_x \varphi + cW.$$

Выполним преобразования:

$$\partial_x = \delta^{\alpha_1} \partial_x^*, \quad \partial_t = \delta^{\alpha_2} \partial_t^*, \quad \varphi = \delta^{\alpha_3} \varphi^*;$$

$$w = \delta^{\alpha_4} w^*, \quad W = \delta^{\alpha_5} W^*, \quad V = \delta^{\alpha_6} V^*;$$

$$Q = \delta^{\alpha_7} Q^*, \quad M = \delta^{\alpha_8} M^*, \quad N = \delta^{\alpha_9} N^*, \quad K = K,$$

приводящие к соотношениям:

$$\partial_x^* \sim 1, \quad \partial_t^* \sim 1, \quad \varphi^* \sim w^* \sim W^* \sim V^* \sim Q^* \sim M^* \sim N^* \sim K.$$

Соответствующая таблица показателей степени будет:

$$\begin{aligned} & 2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ & 2\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, 2\alpha_2 + \alpha_4 \\ & 2\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, 2\alpha_2 + \alpha_5 \\ & \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, 2\alpha_2 + \alpha_6 \\ & \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_3; \alpha_8, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6 \\ & \alpha_9, \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_6; \quad 0, \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим следующие значения параметров:

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2, \\ \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 2, \alpha_7 = 1, \alpha_8 = 0, \alpha_9 = 0.$$

Таблица (1) при этом принимает вид:

$$\begin{array}{cccccc} -1, & 1, & 1, & 1, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 2, & 2, & 0 & \\ 0, & 0, & 2, & 2, & 0 & \\ 2, & 0, & 2, & 0 & & \\ 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 2, & 2 \\ 0, & 2, & 0, & 2, & 0, & 2, & 0, & 2. \end{array}$$

Упрощенные уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \varphi - \partial_t^2 \varphi &= 0, \\ a_s^2 \partial_x^2 w + (a_s^2 + c) \partial_x \varphi - \partial_t^2 w &= 0, \\ 8a_s^2 \partial_x^2 w + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \varphi + \partial_t^2 W &= 0, \\ 8c \partial_x \varphi + \varepsilon \partial_t^2 V &= 0, \\ Q = \partial_x w + \varphi, \quad M = \partial_x \varphi, \\ N = c \partial_x \varphi, \quad K = c \partial_x \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем к более подробному изучению полученного варианта упрощения. Он отвечает быстрым изменениям по x и по t , что отвечает отрицательным значениям параметров α_1 и α_2 и, соответственно, большим значениям дифференциальных операторов ∂_x и ∂_t . В этих условиях результаты, получаемые в первом приближении, нуждаются в уточнениях, достигаемых путем построения процедур последовательных приближений.

Представим искомые функции в виде рядов:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i, \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i, \quad W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i, \quad V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i, \\ Q &= \sum_{i=1}^{\infty} Q_i, \quad M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i, \quad N = \sum_{i=1}^{\infty} N_i, \quad K = \sum_{i=1}^{\infty} K_i. \end{aligned}$$

Упрощенные уравнения (2) порождают бесконечную рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \varphi_i + c \partial_x W_i + c \partial_x V_{i-1} - 8a_s^2 (\partial_x w_i + \varphi_{i-1}) - \partial_t^2 \varphi_i &= 0 \\ a_s^2 \partial_x^2 w_i + (a_s^2 + c) \partial_x \varphi_{i-1} + W_{i-1} + c V_{i-2} - \partial_t^2 w_i &= 0 \\ 8a_s^2 \partial_x^2 w_i + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \varphi_{i-1} + 24(W_{i-1} + c V_{i-2}) + \partial_t^2 W_i &= 0 \\ 8(V_{i-1} + c \partial_x \varphi_i + c W_i) + \varepsilon \partial_t^2 V_i &= 0 \\ Q_i = \partial_x w_i + \varphi_{i-1} \\ M_i = \partial_x \varphi_i + c(W_i + V_{i-1}) \\ N_i = W_i + c(\partial_x \varphi_i + V_{i-1}) \\ K_i = V_{i-1} + c(\partial_x \varphi_i + W_i) \quad (i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3)$$

Решение этих уравнений разыскиваем в виде:

$$\begin{aligned} w_i &= \sum_{j=2}^i w_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i w_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1} \\ W_i &= \sum_{j=2}^i W_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i W_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1} \\ \varphi_i &= \sum_{j=1}^i \varphi_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j} + \sum_{j=1}^i \varphi_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j} \\ V_i &= \sum_{j=1}^i V_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j+1} + \sum_{j=1}^i V_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j+1} \\ Q_i &= \sum_{j=2}^i Q_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-2} + \sum_{j=1}^i Q_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-2} \\ M_i &= \sum_{j=1}^i M_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i M_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1} \\ N_i &= \sum_{j=1}^i N_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i N_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1} \\ K_i &= \sum_{j=1}^i K_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i K_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражения вида $t-x$ определены при $x \leq t$ и равны нулю при $x > t$; выражения вида $a_s t-x$ определены при $x \leq a_s t$ и равны нулю при $x > a_s t$. Коэффициенты сумм (4) определены при значениях j , заданных в записях соответствующих сумм. Если индекс выходит за указанные пределы, то коэффициенты считаются равными нулю.

После подстановки решений (5) в рекуррентные уравнения (4), а также применения к получившемуся результату некоторых несложных математических преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j-1}^1 &= \frac{1}{2(i-j+1)(\gamma+i+j-2)} \left\{ (i-j+2)(i-j+1)\varphi_{i,j-2}^1 + \right. \\ &+ c \left[(i-j+1)W_{i-1,j-2}^1 - (\gamma+i+j-2)W_{i-1,j-1}^1 + \right. \\ &+ (i-j+1)V_{i-1,j-2}^1 - (\gamma+i+j-2)V_{i-1,j-1}^1 \left. \right] - 8a_s^2 \left[(i-j+1)w_{i-1,j-2}^1 - \right. \\ &\left. - (\gamma+i+j-2)w_{i-1,j-1}^1 + \varphi_{i-1,j-1}^1 \right] \left. \right\} \quad (i = 2, 3, \dots; j = 2, \dots, i), \\ \varphi_{i,j}^2 &= \frac{1}{(a_s^2-1)(\gamma+i+j-1)(\gamma+i+j-2)} \left\{ (i-j+2)(i-j+1)\varphi_{i,j-2}^2 - \right. \\ &- 2(i-j+1)(\gamma+i+j-2)\varphi_{i,j-1}^2 + c \left[(i-j+1)W_{i-1,j-2}^2 + V_{i-1,j-2}^2 \right] - \\ &- (\gamma+i+j-2) \left[W_{i-1,j-1}^2 + V_{i-1,j-1}^2 \right] \left. \right] - 8a_s^2 \left[(i-j+1)w_{i-1,j-2}^2 - \right. \\ &\left. - (\gamma+i+j-2)w_{i-1,j-1}^2 + \varphi_{i-1,j-1}^2 \right] \left. \right\} \quad (i = 2, 3, \dots; j = 2, \dots, i), \end{aligned}$$

$$w_{ij}^1 = \frac{1}{(1-a_s^2)(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ a_s^2(i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^1 - 2a_s^2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)w_{i,j-1}^1 + (a_s^2+c)(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^1 \right\} + W_{i-1,j-1}^1 + cV_{i-1,j-1}^1 \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i)$$

$$w_{i,j-1}^2 = \frac{1}{2a_s^2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)} \left\{ a_s^2(i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^2 + (a_s^2+c)(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^2 \right\} + W_{i-1,j-1}^2 + cV_{i-1,j-1}^2 \quad (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i)$$

$$W_{ij}^1 = -\frac{1}{(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ 8a_s^2[(i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^1 - 2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)w_{i,j-1}^1 + (\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)w_{ij}^1] + (8a_s^2+24c)(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^1 \right\} + 24(W_{i-1,j-1}^1 + cV_{i-1,j-1}^1) \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i)$$

$$W_{ij}^2 = -\frac{1}{a_s^2(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ 8a_s^2[(i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^2 - 2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)w_{i,j-1}^2 + (\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)w_{ij}^2] + (8a_s^2+24c)(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^2 \right\} + 24(W_{i-1,j-1}^2 + cV_{i-1,j-1}^2) \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i)$$

$$V_{ij}^1 = -\frac{8}{\varepsilon(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ V_{i-1,j-1}^1 + c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^1] + cW_{i-1,j-1}^1 \right\} \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i)$$

$$V_{ij}^2 = -\frac{8}{\varepsilon a_s^2(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ V_{i-1,j-1}^2 + c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^2] + cW_{i-1,j-1}^2 \right\} \quad (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i)$$

$$Q_{ij}^1 = (i-j+1)w_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j)w_{ij}^1 + \varphi_{ij}^1, \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i)$$

$$Q_{ij}^2 = (i-j+1)w_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j)w_{ij}^2 + \varphi_{ij}^2, \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i)$$

$$M_{ij}^1 = (i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^1 + c(W_{i-1,j-1}^1 + V_{i-1,j-1}^1) \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i)$$

$$M_{ij}^2 = (i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^2 + c(W_{i-1,j-1}^2 + V_{i-1,j-1}^2) \quad (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i)$$

$$N_{ij}^1 = W_{i-1,j-1}^1 + c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^1 + V_{i-1,j-1}^1] \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i)$$

$$N_{ij}^2 = W_{i-1,j-1}^2 + c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^2 + V_{i-1,j-1}^2] \quad (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i)$$

$$K_{ij}^1 = V_{i-1,j-1}^1 + c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^1 + W_{i-1,j-1}^1]$$

$$(i=1,2,\dots; j=1,\dots,i)$$

$$K_{ij}^2 = V_{i-1,j-1}^2 + c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^2 + W_{i-1,j-1}^2] \quad (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i). \quad (6)$$

Рекуррентные соотношения (6) не позволяют находить коэффициенты вида φ_{ii}^1 и w_{ii}^2 . Эти коэффициенты находятся при помощи граничных условий. При задании этих условий учтем, что решение вида (5) описывает распространение упругой волны в положительном направлении из точки $x=0$, т. е. от торца полубесконечной балки $x \geq 0$. При этом рассматривается случай преобладания углового перемещения φ над другими перемещениями. Такой случай может реализоваться при внезапно приложенном на торце балки изгибающем моменте. В соответствии с (3) и (6) имеем:

$$M(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (M_{ii}^1 + M_{ii}^2 a_s^{\gamma+2(i-1)}) t^{\gamma+2(i-1)}. \quad (7)$$

Следовательно, изгибающий момент при $x=0$ должен задаваться в виде разложения по степеням t вида:

$$M(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i t^{\gamma+2(i-1)}. \quad (8)$$

Приравнявая коэффициенты в (7) к коэффициентам в (8) получаем, с учетом (19):

$$\varphi_{ii}^1 = \frac{1}{\gamma+2i-1} \left\{ \varphi_{i,i-1}^1 + c(W_{i-1,i-1}^1 + V_{i-1,i-1}^1) - f_i + a_s^{\gamma+2(i-1)} [\varphi_{i,i-1}^2 - (\gamma+2i-1)\varphi_{ii}^2 + c(W_{i-1,i-1}^2 + V_{i-1,i-1}^2)] \right\} \quad (i=1,2,\dots) \quad (9)$$

В дальнейшем ограничимся случаем внезапно приложенного в момент времени $t=0$ и остающегося в дальнейшем постоянным момента $M(0,t)=1$. При этом будет:

$$\gamma=0, \quad f_i = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & i>1 \end{cases}$$

Кроме заданного изгибающего момента на торце балки может быть задан также прогиб (шарнирная опора) либо перерезывающая сила (свободный торец). В первом случае, в соответствии с (3) и (18), имеем:

$$w(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (w_{ii}^1 + w_{ii}^2 a_s^{\gamma+2i}) t^{\gamma+2i} = 0. \quad (10)$$

Отсюда получаем:

$$w_{ii}^2 = -\frac{w_{ii}^1}{a_s^{\gamma+2i}} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (11)$$

Во втором случае будет:

$$Q(0, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (Q_{ii}^1 + Q_{ii}^2 a_s^{\gamma+2i-1}) t^{\gamma+2i-1} = 0. \quad (12)$$

Отсюда, в соответствии с (19), имеем:

$$w_{ii}^2 = \frac{1}{\gamma+2i} \left[\frac{w_{i,i-1}^1 - (\gamma+2i)w_{ii}^1 + \varphi_{ii}^1}{a_s^{\gamma+2i-1}} + w_{i,i-1}^2 + \varphi_{ii}^2 \right]. \quad (13)$$

Таким образом, задавая (8), (10) или (12) мы имеем возможность находить все коэффициенты сумм (5) по решениям (6), (9) и (11) или (13), т.е. доводить решение до конца.

Остановимся коротко на вопросе о сходимости построенных рядов. Эти ряды носят название так называемой прифронтовой асимптотики. Это означает, что они в первую очередь предназначены для описания зоны вблизи фронта волны. В каждый член ряда входит величина $t-x$ и $a_s t-x$. При малых значениях этих величин общий член ряда стремится к нулю. Т.е. выполняется необходимое условие сходимости. Ранее было показано [5, 6], что удержание только слагаемых, преобладающих вблизи фронта, приводит к рядам для функции Бесселя, для которых сходимость доказана.

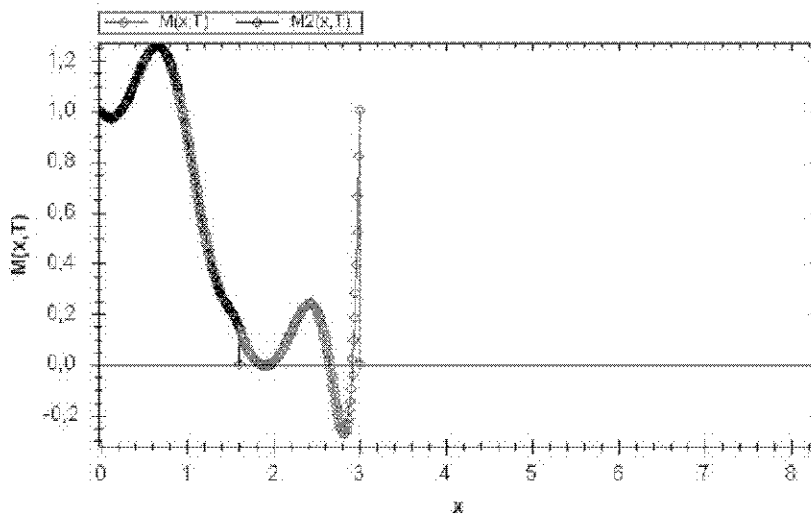


Рис. 1. Распространение волны $M(x, \tau)$ в стержне квадратного сечения $\tau = 3$

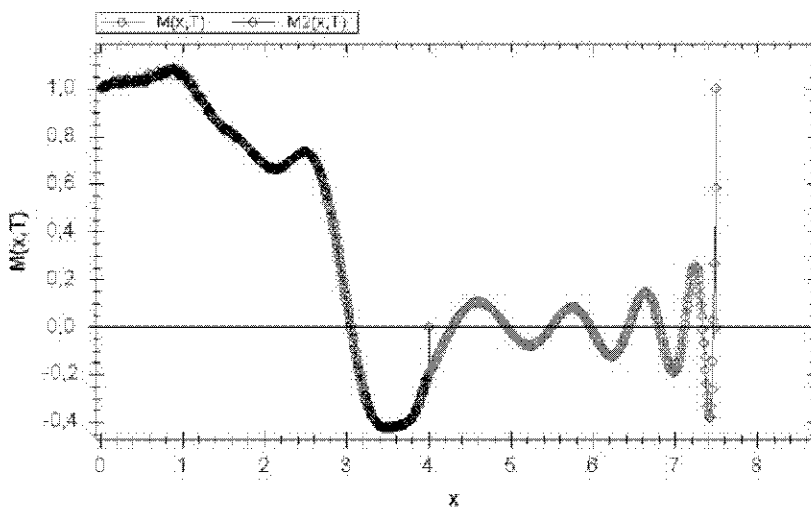


Рис. 2. Распространение волны $M(x, \tau)$ в стержне квадратного сечения $\tau = 7,5$

На рис. 1, 2 приведені відповідні графічні результати. Изображені графіки изгибающего момента как функции x для моментов времени $\tau = 3$ и $\tau = 7,5$. Мы видим, что в отличие от картины, получаемой при помощи известных уравнений изгиба стержня, картина вблизи фронта распространяющейся волны выглядит значительно сложнее. Вблизи трехмерного фронта волны наблюдаются интенсивные поперечные колебания стержня, которые приводят к быстроизменяющемуся напряженно-деформированному состоянию. В дальнейшем происходит переход к классическому решению в виде так называемого квазифронта, то есть не ступенчатого, а быстроизменяющегося роста продольного усилия. С удалением от фронта, картина переходит в классическую. Таким образом, классическое решение для продольной волны в стержне – это медленно изменяющаяся асимптотика по отношению к более точному решению.

Выводы

Исследование распространения нестационарного волнового возмущения в балке при воздействии внезапно приложенного изгибающего момента на основе предлагаемых уточненных уравнений показало, что картина возмущения хорошо соответствует трехмерным уравнениям теории упругости. В частности, возмущение имеет два фронта – продольных и поперечных волн, причем скорости этих фронтов совпадают со скоростями таких же фронтов в теории упругости.

Шамровський О. Д., Єгарміна Л.М. Дослідження розповсюдження нестационарних хвиль, що вигинають у балці на основі уточненої моделі

Розглядається процес розповсюдження нестационарних хвиль у балці прямокутного перерізу під час її вигину на основі уточнених рівнянь [1] для випадку раптово прикладеного моменту що вигинає. Наведені відповідні графіки моменту, що вигинає. На відміну від відомих раніше рівнянь [2], швидкості розповсюдження фронтів позовдовжніх та поперечних хвиль співпадають із швидкостями аналогічних хвиль у теорії пружності.

Ключові слова: асимптотико-груповий аналіз, уточнені динамічні рівняння вигину балки, квазіфронт, момент що вигинає, хвиля що вигинає.

Shamrovskiy A., Egarmina L. Research of non-stationary flexural waves distribution in a bar on the basis of the specified model

The process of non-stationary waves distribution in the bending bar with a rectangular cross-section is examined on the basis of the specified equation for the case of suddenly attached bending moment. The proper charts for bending moment are resulted. Unlike to the well-known equations, the speeds of the longitudinal and transversal wave fronts distribution coincide with analogical wave speeds in the elasticity theory.

Key words: asymptotic-group analysis, specified dynamic equalizations of bar bending, quasifront, bending moment, bending wave.

Список литературы

1. Шамровский А. Д. Уточненные динамические уравнения изгиба балки с учетом трехмерной картины напряженно-деформированного состояния в поперечном сечении балки / Шамровский А. Д., Егармина Л. Н. // Сб. научн. тр. по материалам междунар. научн.-практич. конф. «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании-2010». Т. 5. Технические науки. – Одесса : Черноморье, 2010. – С. 28–37.
2. Тимошенко С.П. . Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко – М. : «Наука», 1967. – 444 с.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков – М. : «Наука», 1968. – 559 с.
4. Шамровский А. Д. Вывод динамических уравнений продольной деформации стержня при помощи двойного упрощения уравнений теории упругости / А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2009. – № 2. – С. 111–115.
5. Скрыпник И. А. Двумерное моделирование трехмерных продольных волн в плоском слое./ И. А. Скрыпник, А. Д. Шамровский // Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства – Запорожье, 1995. – С. 43–50.
6. Шамровский А. Д. Асимптотико-груповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости / А. Д. Шамровский – Запорожье, Изд-во ЗГИА, 1997 – 169 с.

Одержано 27.01.2011