IV МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В МЕТАЛУРГІЇ ТА МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 004.021:539.3

Д-р техн. наук А. Д. Шамровский, Т. А. Миняйло, Д. Н. Колесник

Государственная инженерная академия, г. Запорожье

УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Ранее рассмотренный метод расчета пространственных стержневых конструкций улучшен с целью повышения быстродействия алгоритма, уменьшения числа итераций и времени выполнения. Разработана и применена новая методика для нахождения промежуточного положения подвижных вершин.

Ключевые слова: *стержневые конструкции, пространственные конструкции, нелинейные системы, метод последовательных перемещений, использование ЭВМ, быстродействие, алгоритмы.*

Введение

В работе [1] представлен метод последовательных перемещений для расчета плоских стержневых систем. Этот метод позволяет решать как линейные, так и нелинейные задачи расчета таких систем. В работе [2] предложенный метод был расширен для решения пространственных задач.

Данная работа является продолжением работ [1, 2] с целью улучшения предложенного в них метода. Ранее была предложена новая методика, реализующая плоские случаи решения задачи, применим ее и для пространственного варианта стержневых систем. Усовершенствованный метод позволяет существенно уменьшить количество итераций и сократить время расчета конструкции, а также улучшить надежность алгоритма вычислений.

Случай одноярусных конструкций, состоящих из произвольного количества стержней

Рассмотрим пространственную стержневую систему, изображенную на рис. 1.

Начальные координаты узлов будут:

$$x_{B0},\ y_{B0},\ z_{B0},\ x_{Ai} = \text{const},$$
$$y_{Ai} = \text{const},\ z_{Ai} = \text{const} \quad (i = 1,...,n). \qquad (1)$$

Пусть система находится в произвольном положении, отвечающем некоторому смещению узла B вдоль осей координат:

$$u_{B0},\ v_{B0},\ w_{B0}. \qquad (2)$$

Начальные длины стержней равны:

$$L_{i0} = \sqrt{(x_{B0} - x_{Ai})^2 + (y_{B0} - y_{Ai})^2 + (z_{B0} - z_{Ai})^2}$$
$$(i = 1,...,n). \qquad (3)$$

Координаты узла B в произвольном положении:

$$x_B = x_{B0} + u_{B0},\ y_B = y_{B0} + v_{B0},\ z_B = z_{B0} + w_{B0}. \qquad (4)$$

Длины стержней при произвольном положении узла B равны:

$$L_i = \sqrt{(x_B - x_{Ai})^2 + (y_B - y_{Ai})^2 + (z_B - z_{Ai})^2}$$
$$(i = 1,...,n). \qquad (5)$$

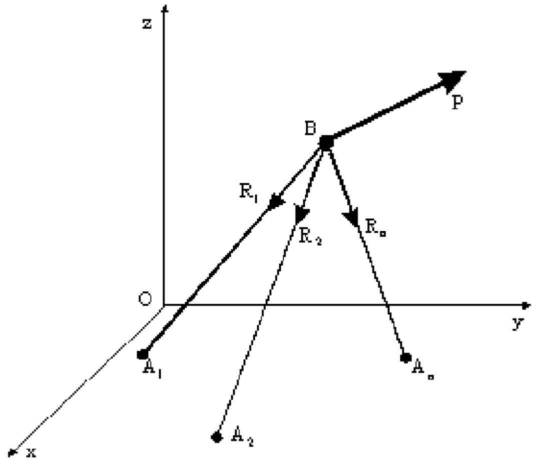

Рис. 1. Система из n стержней

Обозначим углы между стержнем номер i и соответствующей осью координат через $\alpha_{xi},\ \alpha_{yi},\ \alpha_{zi}\quad (i=1,\dots,n)$.

Тогда косинусы и синусы этих углов будут равны соответственно:

$$\cos\alpha_{xi}=\frac{x_B-x_{Ai}}{L_i},\qquad \cos\alpha_{yi}=\frac{y_B-y_{Ai}}{L_i},\qquad \cos\alpha_{zi}=\frac{z_B-z_{Ai}}{L_i}\quad (i=1,\dots,n). \tag{6}$$

Абсолютные деформации стержней равны:

$$\Delta L_i=L_i-L_{i0},\quad (i=1,\dots,n). \tag{7}$$

Для реакций стержней имеем:

$$R_i=D_i\Delta L_i,\quad (i=1,\dots,n), \tag{8}$$

где

$$D_i=\frac{E_iF_i}{L_{i0}}\quad (i=1,\dots,n), \tag{9}$$

где E_i – модуль упругости материала стержня номер i;

F_i – площадь поперечного сечения стержня номер i.

Пусть теперь из положения со смещением (2) узел *B* получит дополнительное смещение:

$$u_B,\ v_B,\ w_B\,. \tag{10}$$

Составим уравнения равновесия узла *B* с учетом этого дополнительного смещения в линейной постановке. Дополнительные деформации стержней, вызванные смещениями (10), будут:

$$dL_i=u_B\cos\alpha_{xi}+v_B\cos\alpha_{yi}+w_B\cos\alpha_{zi}\quad (i=1,\dots,n). \tag{11}$$

Вызванные этими смещениями реакции равны:

$$r_i=D_i dL_i\quad (i=1,\dots,n). \tag{12}$$

Складывая реакции (8) и (12) получаем уравнения равновесия:

$$\sum X=P_x-\sum_{i=1}^{n}(R_i+r_i)\cos\alpha_{xi}=0;$$

$$\sum Y=P_y-\sum_{i=1}^{n}(R_i+r_i)\cos\alpha_{yi}=0;$$

$$\sum Z=P_z-\sum_{i=1}^{n}(R_i-r_i)\cos\alpha_{zi}=0\quad (i=1,\dots,n). \tag{13}$$

Подставляя в (13) выражения (12) с учетом (11) получаем:

$$a_{11}u_B+a_{12}v_B+a_{13}w_B=\sum x=P_x-\sum_{i=1}^{n}R_i\cos\alpha_{xi};$$

$$a_{21}u_B+a_{22}v_B+a_{23}w_B=\sum y=P_y-\sum_{i=1}^{n}R_i\cos\alpha_{yi};$$

$$a_{31}u_B+a_{32}v_B+a_{33}w_B=\sum z=P_z-\sum_{i=1}^{n}R_i\cos\alpha_{zi},$$

где

$$a_{11}=\sum_{i=1}^{n}D_i\cos^2\alpha_{xi},$$

$$a_{12}=a_{21}=\sum_{i=1}^{n}D_i\cos\alpha_{xi}\cos\alpha_{yi},$$

$$a_{13}=a_{31}=\sum_{i=1}^{n}D_i\cos\alpha_{xi}\cos\alpha_{zi},$$

$$a_{22}=\sum_{i=1}^{n}D_i\cos^2\alpha_{yi},$$

$$a_{23}=a_{32}=\sum_{i=1}^{n}D_i\cos\alpha_{yi}\cos\alpha_{zi},$$

$$a_{33}=\sum_{i=1}^{n}D_i\cos^2\alpha_{zi}. \tag{15}$$

Решая систему уравнений (14) находим новое перемещение узла *B*:

$$u_{B0}\to u_{B0}+u_B,\ v_{B0}\to v_{B0}+v_B,\quad w_{B0}\to w_{B0}+w_B. \tag{16}$$

После этого выкладки повторяются, начиная с (4). Условием окончания циклического процесса можно взять:

$$\sqrt{\left(\sum x\right)^2+\left(\sum y\right)^2+\left(\sum z\right)^2}<\sqrt{P_x^2+P_y^2+P_z^2}\,\varepsilon, \tag{17}$$

где ε – заданная относительная погрешность.

Однако описанный алгоритм действителен не всегда. Возможны случаи, когда определитель систем уравнений равен или близок к нулю, что характерно, например, для потери устойчивости системы. В таких случаях рекомендуется заменить поиск смещений u_B, v_B формулами, которые применялись в методе последовательных перемещений:

$$u_B=\gamma\sum x,\quad v_B=\gamma\sum y,\quad w_B=\gamma\sum z, \tag{18}$$

где γ коэффициент пропорциональности, который равен меньшей из величин, обратных жесткостям:

$$\gamma\approx\min\left(\frac{1}{D_i}\right)\quad (i=1,\dots,n). \tag{19}$$

Однако и при неравном нулю определителе может оказаться, что перемещения u_B, v_B, w_B слишком велики, что противоречит условиям составления линейной системы уравнений (14), т. е. предположениям о малости данных перемещений. Для того, чтобы не допустить этого, зададим какие-то максимальные значения перемещений:

$$u_{\max},\quad v_{\max},\quad w_{\max}\,. \tag{20}$$

Если выясняется, что $u_B > u_{\max}$, то выполняем замены:

$$k = \frac{u_{\max}}{u_B},\quad u_B \to k u_B,\quad v_B \to k v_B,$$
$$w_B \to k w_B\,. \tag{21}$$

При этом вектор перемещения узла B сохраняет свое направление, но перемещение u_B уже не превосходит заданного максимального значения (равно ему). После этого для вновь полученных значений перемещений выполняем аналогичную проверку для второго перемещения: При $v_B > v_{\max}$ выполняем замены:

$$k = \frac{v_{\max}}{v_B},\quad u_B \to k u_B,\quad v_B \to k v_B,$$
$$w_B \to k w_B\,. \tag{22}$$

Если, после этого, будет $w_B > w_{\max}$, то выполняем также замены:

$$k = \frac{w_{\max}}{w_B},\quad u_B \to k u_B,\quad v_B \to k v_B,$$
$$w_B \to k w_B\,. \tag{23}$$

Таким образом, теперь обеспечиваются достаточно малые значения линейных перемещений узла с сохранением его направления.

На рис. 2 и 3 приведены графические результаты решения задач о вертикальной нагрузки системы из трех стержней для линейного случая (небольшой нагрузки) и случая, который характеризуется потерей устойчивости.

Усовершенствованный метод последовательных перемещений для произвольных конструкций

Рассмотренный метод применяется и для конструкции произвольной степени сложности, имеющей много подвижных узлов. В таком случае метод решения аналогичен используемому для конструкции с одним подвижным узлом. На одном шаге вычислений предполагается, что конструкция имеет лишь один подвижный узел, все остальные закреплены. Решаем задачу приведенным выше способом для данного узла и переходим к следующему. Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие (17) для всех узлов одновременно.

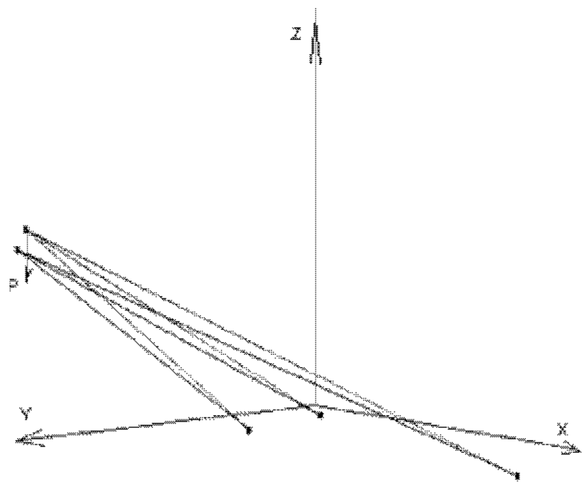

Рис. 2. Расчет конструкции усовершенствованным методом последовательных перемещений при небольшой нагрузке на узел

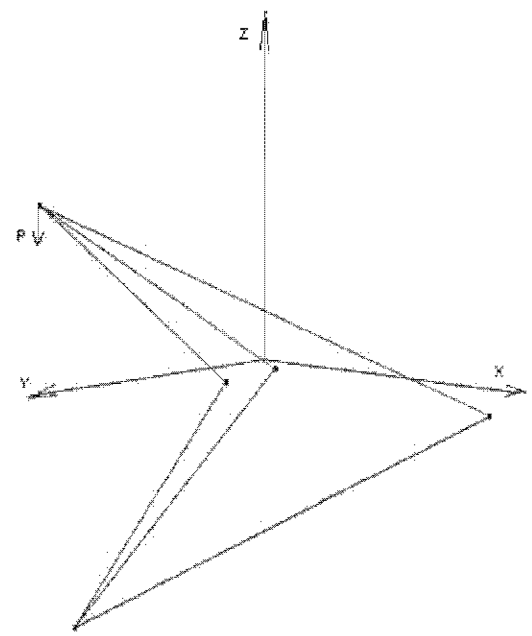

Рис. 3 Расчет конструкции усовершенствованным методом последовательных перемещений (потеря устойчивости)

И в этом случае усовершенствованный подход позволяет сократить количество итераций и затрачиваемое время для выполнения расчетов.

На рис. 4 приведен графический результат расчета двухъярусной конструкции под действием вертикальной нагрузки.

Результаты сравнительной характеристики основных параметров метода последовательных перемещений и усовершенствованного варианта для пространственных стержневых конструкций приведены в табл. 1. В качестве основных параметров, определяющих трудоемкость работы метода, были выбраны количество итерационных шагов и времени, необходимых для выполнения расчета.

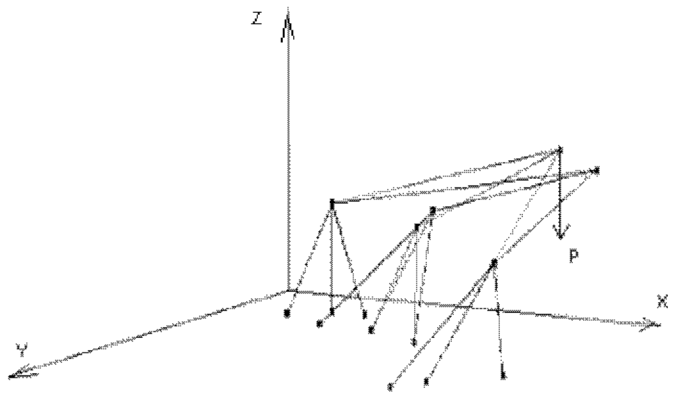

Рис. 4. Расчет методом последовательных перемещений

Таблица 1 – Сравнительная характеристика параметров метода последовательных перемещений и усовершенствованного варианта для пространственных стержневых конструкций

№	Количество стержней	Метод последовательных перемещений		Усовершенствованный метод последовательных перемещений	
		Количество итераций	Время расчета, с	Количество итераций	Время расчета, с
1	2 (одноуровневая)	175	0,0027537	110	0,0017155
2	3 (одноуровневая)	16032	0,0446252	8739	0,0355393
3	6 (двухуровневая)	3579	0,0294479	1810	0,0265602
4	12 (двухуровневая)	1928	0,0260890	1023	0,0725626

Таким образом, применение усовершенствованного метода последовательных перемещений позволяет существенно сократить количество итераций, необходимых для расчета пространственной конструкции, однако сокращение времени расчета незначительное, что можно объяснить составлением и решением СЛАУ на каждом шаге применения метода.

Выводы

Представленный в [2] метод расчета стержневых конструкций усовершенствован путем применения нового подхода к решению поставленной задачи, что позволило сократить число итераций и времени выполнения расчета, а также увеличить надежность метода и его точность. Полученные результаты позволяют применять метод последовательных перемещений как для решения сложных пространственных конструкций (ферм, арок), так и для решения задач теоретической механики и механики сплошной среды.

Список литературы

1. Шамровський О. Д. Метод последовательных приближений для расчета стержневых систем / О. Д. Шамровський, А. І. Безверхий, В. В. Кривуляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2008. – № 2. – С. 110–118.
2. Шамровський О. Д. Расчет стержневых конструкций методом последовательных перемещений с учетом геометрической нелинейности / О. Д. Шамровський, Д. М. Колесник, Ю. О. Лимаренко // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2009. – № 1. – С. 78–85.

Одержано 17.06.2011

Шамровський О.Д., Міняйло Т.О., Колесник Д.М. Удосконалений метод послідовних переміщень для розрахунку просторових стержневих конструкцій

Раніше розглянутий метод розрахунку просторових стержневих конструкцій вдосконалено з метою підвищення швидкості алгоритму, зменшення кількості ітерацій та часу виконання. Розроблена та застосована нова методика для розрахунку проміжного положення рухомих вершин.

Ключові слова: *стержневі конструкції, просторові конструкції, нелінійні системи, метод послідовних переміщень, використання ЕОМ, швидкодія, алгоритми.*

Shamrovskiy A., Minyajlo T., Kolesnik D. Improved method of successive approximations for spatial beam structures calculation

The previous method of spatial beam structures calculation has been improved in order to increase algorithm speed, reduce number of iterations and execution time. A new method of finding mobile nodes' intermediate positions has been developed and used.

Key words: *beam structures, surface structures, nonlinear systems, method of successive movements, computer using, performance, algorithms.*