

УДК 539.3

Канд. физ.-мат. наук А. В. Пожуев, Е. Н. Михайлуца

Государственная инженерная академия, г. Запорожье

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ С НЕИДЕАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ

Исследуется нестационарная реакция двухслойной конструкции конечных размеров с упругой прослойкой между слоями на действие нормальной нагрузки. Для построения модели использовались динамические уравнения теории упругости для слоев, прослойка подчиняется модели Jones-Whittier. Решения как для прогиба, так и для напряжения в каждой точке конструкции, полученные разложением в ряды Фурье и методом интегрального преобразования Лапласа, сопоставлены с результатами для идеального и жесткого контактов между слоями.

Ключевые слова: пластина, прослойка, деформация, волновое уравнение, ряд Фурье, преобразование Лапласа, пространство изображений, многочлен Лежандра.

Рассматривается слоистая конструкция, ограниченная в плане размерами $a \times b$, составленная из двух слоев, толщиной h_1 и h_2 , и прослойки толщиной h между ними. Пластина нагружена нормальным давлением. Начало координат выбрано на границе слоев, ось Z направлена вверх. Нижний слой жестко сцеплен (полное склеивание без податливости) с абсолютно жестким полупространством.

Для описания движения слоев используются динамические уравнения теории упругости, записанные здесь в виде:

$$\begin{aligned} & (\lambda_k + \mu_k) \text{grad div } \bar{U}^{(k)} - \mu_k \text{rot rot } \bar{U}^{(k)} = \\ & = \rho_k \frac{\partial^2 \bar{U}^{(k)}}{\partial t^2} \quad k=1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь индекс 1 относится к верхнему (нагруженному) слою, а 2 – к нижнему; $\bar{U}^{(k)}$ – вектор перемещений срединной поверхности слоев пластины в направлении осей x, y, z ; λ_k, μ_k, ρ_k – параметры Ламе и массовая плотность слоев.

Предполагая толщину прослойки малой по сравнению с длиной волны, и, пренебрегая ее инерционными свойствами, условия связи между слоями аналогично [2] запишем в виде:

$$\text{при } z=0 \quad \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{E}{h} (U_z^{(1)} - U_z^{(2)}), \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \frac{G}{h} (U_x^{(1)} - U_x^{(2)}),$$

$$\sigma_{yz}^{(1)} = \frac{G}{h} (U_y^{(1)} - U_y^{(2)}),$$

где E, G – модули Юнга и сдвига склейки.

Верхний слой нагружен нормальным давлением $P(x, y, t)$, равномерно распределенным по полосам шириной $2l_i$ по координате x , которое приложено в начальный момент времени и аналитически описывается функцией Хевисайда. Граничные условия на внешних поверхностях пластины записываются следующим образом:

$$\text{при } z = -h_2 \quad U_x^{(2)} = U_y^{(2)} = U_z^{(2)} = 0,$$

$$\text{при } z = h_1 \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = -P. \quad (3)$$

Принимая во внимание наличие торцевых диафрагм для слоев жестких в своей и гибких из своей плоскости, запишем для каждого слоя:

$$\text{при } x=0 \text{ и } a: \quad U_z^{(k)} = 0, \quad \sigma_{xz}^{(k)} = 0,$$

$$\text{при } y=0 \text{ и } b: \quad U_z^{(k)} = 0, \quad \sigma_{yz}^{(k)} = 0. \quad (4)$$

Перейдем в уравнениях движения к безразмерным переменным по формулам, отнеся все линейные величины к толщине верхнего слоя

$$\{U_x^{(k)}, U_y^{(k)}, U_z^{(k)}\} = \frac{1}{h_1} \{U_x^{(k)}, U_y^{(k)}, U_z^{(k)}\},$$

$$\{x^*, y^*, z^*\} = \frac{1}{h_1} \{x, y, z\},$$

$$\gamma = \frac{G_2}{G_1}, \quad \rho_1 = \frac{\rho_1^*}{\rho_2^*}, \quad \kappa_s = \frac{h_2}{h_1}. \quad (5)$$

Для интегрирования уравнений движения введем скалярный и векторный потенциалы Φ и $\bar{\Psi}$ по формуле:

$$\bar{U}^{(k)} = grad\Phi^{(k)} + rot\bar{\Psi}^{(k)}. \quad (6)$$

Тогда получаем волновые уравнения и дополнительное условие:

$$\Delta\Phi^{(k)} = \frac{1}{c_{pk}^2} \cdot \frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial t^2}, \Delta\bar{\Psi}^{(k)} = \frac{1}{c_{sk}^2} \cdot \frac{\partial^2\bar{\Psi}^{(k)}}{\partial t^2}, div\bar{\Psi}^{(k)} = 0, \quad (7)$$

где c_{pk}^2, c_{sk}^2 – скорости распространения растяжения-сжатия и сдвига в заполнителе

$$c_{pk}^2 = \frac{2G_k \cdot (1 - \nu_k)}{\rho_k \cdot (1 - 2\nu_k)}, \quad c_{sk}^2 = \frac{G_k}{\rho_k}.$$

Применяя преобразование Лапласа по времени и разложение в двойные ряды Фурье перемещений и напряжений с чередованием синусов и косинусов по x^* и y^* для удовлетворения условий (4):

$$\begin{aligned} \bar{U}^{(k)}(x^*, y^*, p) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{U}_{mn}^{(k)}(p) \cdot \sin\left[\frac{n\pi}{\delta} \cdot x^*\right] \cdot \sin\left[\frac{m\pi}{\varepsilon} \cdot y^*\right] \end{aligned} \quad (8)$$

приходим к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2\Phi_{mn}^{(k)}}{dz^{*2}} - \lambda_1\Phi_{mn}^{(k)} = 0, \quad \frac{d^2\Psi_{mn}^{(k)}}{dz^{*2}} - \lambda_2\Psi_{mn}^{(k)} = 0, \quad (9)$$

где $\lambda_{11} = N_2 + \eta_1 p^2, \quad \lambda_{21} = N_2 + p^2,$

$$\lambda_{12} = N_2 + \frac{\eta_2 p^2}{\gamma_1 \rho_1}, \lambda_{22} = N_2 + \frac{p^2}{\gamma_1 \rho_1}, \eta_k = \frac{1 - 2\nu_k}{2(1 - \nu_k)}.$$

Решения данных уравнений записываем в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}^{(k)} &= c_1^{(k)} \cdot \exp(z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) + c_2^{(k)} \cdot \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{1k}}), \\ \Psi_{xmn}^{(k)} &= c_3^{(k)} \cdot \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + c_4^{(k)} \cdot \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}), \\ \Psi_{ymn}^{(k)} &= c_5^{(k)} \cdot \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + c_6^{(k)} \cdot \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}), \\ \Psi_{zmn}^{(k)} &= c_7^{(k)} \cdot \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + c_8^{(k)} \cdot \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}). \end{aligned} \quad (10)$$

Используя третье уравнение из (7), выражаем функции $c_7^{(k)}$ и $c_8^{(k)}$:

$$\begin{aligned} c_7^{(k)} &= -\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_{2k}}} \cdot \left(\frac{n}{\delta} \cdot c_3^{(k)} + \frac{m}{\varepsilon} \cdot c_5^{(k)} \right), \\ c_8^{(k)} &= \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_{2k}}} \cdot \left(\frac{n}{\delta} \cdot c_4^{(k)} + \frac{m}{\varepsilon} \cdot c_6^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Компоненты перемещения находятся подстановкой (10) с учетом (11) в (6) после перехода в них к безраз-

мерным переменным, применении преобразования Лапласа и разложения потенциальных функций в ряды Фурье. Компоненты напряжения вычисляются с использованием закона Гука. В результате, в пространстве изображений перемещения и контактные напряжения в произвольной точке двухслойной конструкции могут быть вычислены по формулам:

$$\begin{aligned} U_{mnz} &= \sqrt{\lambda_{1k}} \left(c_1^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) - c_2^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) \right) + \\ &+ \frac{m\pi}{\varepsilon} \left(c_3^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + c_4^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) \right) - \\ &- \frac{n\pi}{\delta} \left(c_5^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + c_6^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{mny} &= \frac{m\pi}{\varepsilon} \left(c_1^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) + c_2^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) \right) + \\ &+ \left(\sqrt{\lambda_{2k}} - \frac{n^2 \pi^2}{\delta^2 \sqrt{\lambda_{2k}}} \right) \cdot \left(c_3^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) - c_4^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) \right) - \\ &- \frac{nm\pi^2}{\delta \varepsilon \sqrt{\lambda_{2k}}} \left(c_5^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) - c_6^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{mnx} &= \frac{n\pi}{\delta} \left(c_1^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) + c_2^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) \right) + \\ &+ \frac{nm\pi^2}{\delta \varepsilon \sqrt{\lambda_{2k}}} \left(c_3^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) - c_4^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) \right) + \\ &+ \left(\frac{m^2 \pi^2}{\varepsilon^2 \sqrt{\lambda_{2k}}} - \sqrt{\lambda_{2k}} \right) \cdot \left(c_5^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) - c_6^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{mnz}}{G_k} &= N_3^{(k)} c_1^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) - \\ &- N_3^{(k)} c_2^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) + \frac{2m\pi}{\varepsilon} \sqrt{\lambda_{2k}} c_3^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) - \\ &- \frac{2m\pi}{\varepsilon} \sqrt{\lambda_{2k}} c_4^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) - \frac{2n\pi}{\delta} \sqrt{\lambda_{2k}} c_5^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + \\ &+ \frac{2n\pi}{\delta} \sqrt{\lambda_{2k}} c_6^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{mny}}{G_k} &= \frac{2m\pi}{\varepsilon} \sqrt{\lambda_{1k}} \left(c_1^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) - c_2^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) \right) + \\ &+ \left(\frac{m^2 \pi^2}{\varepsilon^2} - \frac{n^2 \pi^2}{\delta^2} + \lambda_{2k} \right) \cdot \left(c_3^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + c_4^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) \right) - \\ &- \frac{2nm\pi^2}{\delta \varepsilon} \left(c_5^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + c_6^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{mnx}}{G_k} &= \frac{2n\pi}{\delta} \sqrt{\lambda_{1k}} \left(c_1^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) - c_2^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{1k}}) \right) + \\ &+ \frac{2nm\pi^2}{\delta \varepsilon} \left(c_3^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + c_4^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) \right) - \\ &- \left(\frac{n^2 \pi^2}{\delta^2} - \frac{m^2 \pi^2}{\varepsilon^2} + \lambda_{2k} \right) \cdot \left(c_5^{(k)} \exp(z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + c_6^{(k)} \exp(-z^* \sqrt{\lambda_{2k}}) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

Удовлетворяя затем граничным условиям (2), (3) с использованием зависимостей (12), получаем систе-

му линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $c_i, i = 1, \dots, 12$, которая затем решается численно по методу Гаусса. После этого, с использованием (12) и условий (3), получаем коэффициенты Фурье для нормальных перемещений слоев в пространстве изображений в виде:

$$U_{mnz}^* = \frac{P_{mn}}{G_1} \cdot U_{mnz}. \quad (13)$$

Выражения для нахождения перемещения и напряжения в любой точке конструкции являются линейной комбинацией найденных коэффициентов, зависящих от вида внешней нагрузки.

Пусть в начальный момент времени к верхней границе первого слоя прикладывается нормальная нагрузка, равномерно распределенная по участкам длиной $2l_k$ на расстоянии a_k ($k = 1, 2$) от оси y . Аналитически такая нагрузка описывается следующим образом:

$$p_{\delta k}(t, x, y) = p_0 h_k(x) H(t) \delta(y - d_k),$$

$$h_k(x) = \begin{cases} 1, & a_k \leq x \leq a_k + 2l_k \\ 0, & 0 \leq x < a_k \cup a_k + 2l_k < x \leq a \end{cases}, \quad (14)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда, $\delta(y - d_k)$ – дельта-функция Дирака.

Раскладывая нагрузку (14) в ряд Фурье по x^* и применяя преобразование Лапласа по τ , получаем для трансформант нагрузки следующие выражения:

$$p_{\delta nk}^L(p) = p_0 f_{nk}(p) b_{mk}, \quad (15)$$

где $f_{nk}(p) = \frac{1}{n\pi p} \cdot \left[\cos\left(\frac{n\pi}{\delta} \cdot a_k^*\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{\delta} \cdot (2l_k^* + a_k^*)\right) \right]$,

$$b_{mk} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{\varepsilon} \cdot d_k^*\right), \quad l_k^* = l_k/h_1, \quad a_k^* = a_k/h_1, \\ d_k^* = d_k/h_1.$$

После подстановки (15) в (13) задача сводится к суммированию двойных рядов Фурье и обращению преобразования Лапласа.

$$U_z^L(p, x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{G_1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mnz}^*(z^*) (p_{\delta n1}^L + p_{\delta n2}^L) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{\varepsilon} y^*\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x^*\right). \quad (16)$$

Окончательное решение задачи сводится к вычислению двойного обратного преобразования Фурье и обращению преобразования Лапласа. Предложен специальный численный алгоритм, основанный на двукратном применении метода Файлона для вычисления двойных интегралов Фурье и привлечении смещенных многочленов Лежандра. Оригиналы искомых величин по времени вычисляются по формулам [3]:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \cdot a_k P_k^*(e^{-t}), \quad (17)$$

$$a_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(k)} G(i+1), \quad a_i^{(k)} = (-1)^{k+i} \binom{k}{i} \cdot \frac{(k+i)!}{k!i!}. \quad (18)$$

$G(i+1)$ – изображение искомой величины по Лапласу, которое получается после двукратного применения метода Файлона, $P_k^*(e^{-t})$ – смещенный многочлен Лежандра.

Отметим, что при таком подходе к проблеме обращения преобразования Лапласа задача по сути сводится к нахождению функции по ее «взвешенным моментам» или к нахождению функции по значениям изображения некоторой функции в целочисленных точках $p = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), а не к вычислению собственно интеграла обращения. В теоретическом плане вопрос о сходимости представления вида (17) и об оценке остаточного члена до сих пор не доказан [3], поэтому необходимы численные эксперименты, которые и были проведены. Показано, что для обеспечения надежных результатов как по перемещениям, так и по напряжениям, необходимо в рядах и по x^* и по y^* брать по пятьдесят членов, а необходимая точность во всем временном диапазоне получается, если в формулах вида (17) брать восемь членов.

Расчеты проводились для таких значений безразмерных параметров:

$$\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0,25, \quad \gamma = 0,2, \quad \gamma_1 = 0,05, \quad \rho = 0,2, \\ \delta = 10, \quad \varepsilon = 10, \chi_s = 3, \quad \chi_{s1} = 0,1, \quad a_1^* = 4, \quad L^* = 1.$$

На рисунках приведена иллюстрация установления процесса в точке под серединой нагрузки на примере нормальной составляющей тензора перемещений (рис. 1) и тензора напряжений (рис. 2). При этом кривая 1 соответствует границе раздела слоев, а кривая 2 – середине первого слоя.

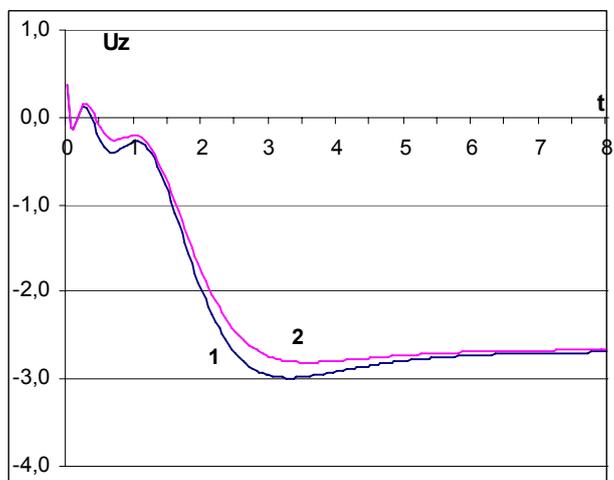


Рис. 1.

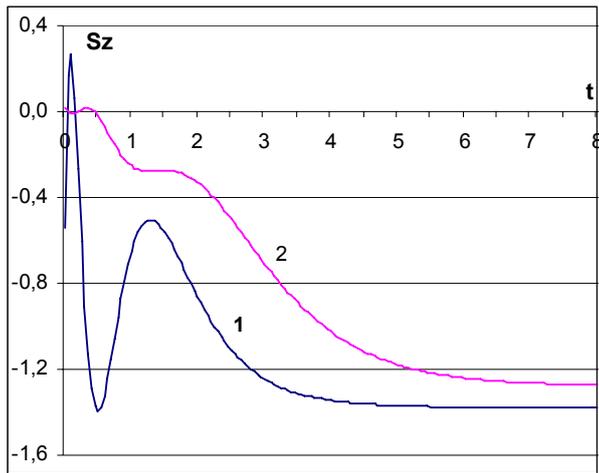


Рис. 2

Полученные результаты наглядно демонстрируют установление переходного процесса и возникающие при этом динамические перегрузки. Также проведен сравнительный анализ влияния упругой прослойки на картину напряженно-деформированного состояния конструкции.

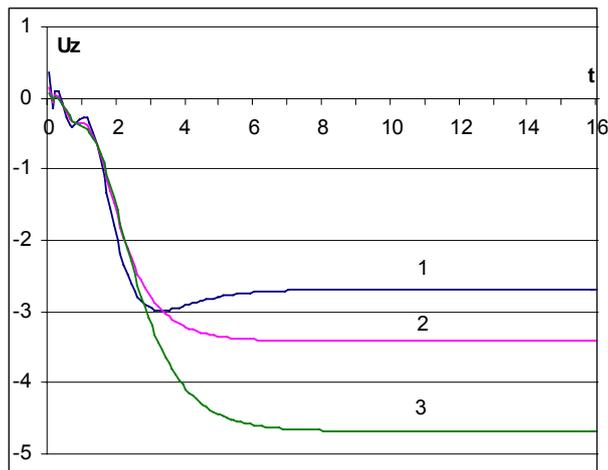


Рис. 3.

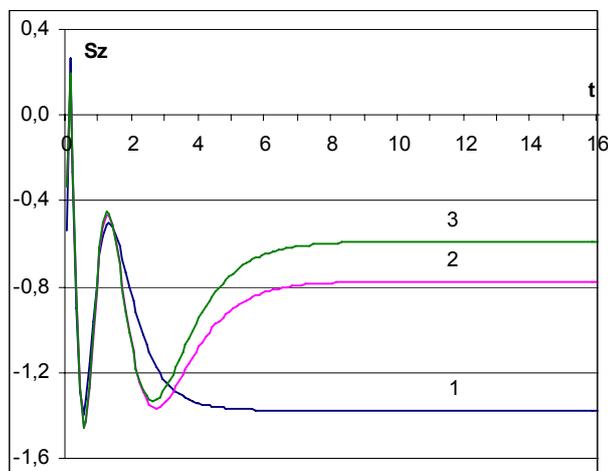


Рис. 4.

Рис. 3 и 4 иллюстрируют влияние демпфирования на картину установления процесса. При этом кривые 1–3 соответствуют упругому, жесткому и скользящему контактам соответственно. На рис. 5 и 6 приведены графики распространения нормальных компонент перемещения и напряжения по толщине конструкции для различных моментов времени. При этом кривые 1–3 соответствуют безразмерным моментам времени $\tau = 1, 3$ и 5 соответственно. Графики демонстрируют картину перегрузки и стремления характеристик к стационарным значениям в каждом слое.

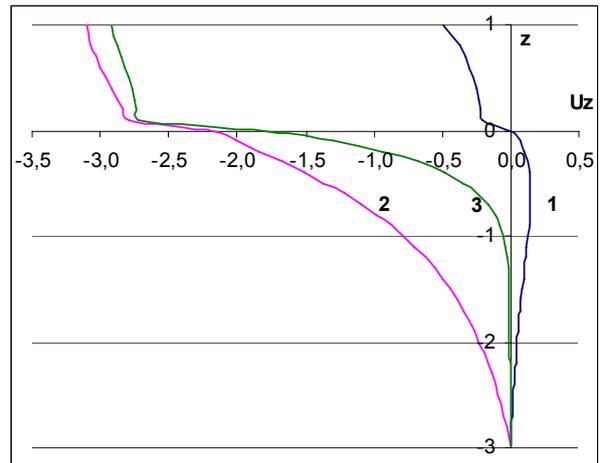


Рис. 5.

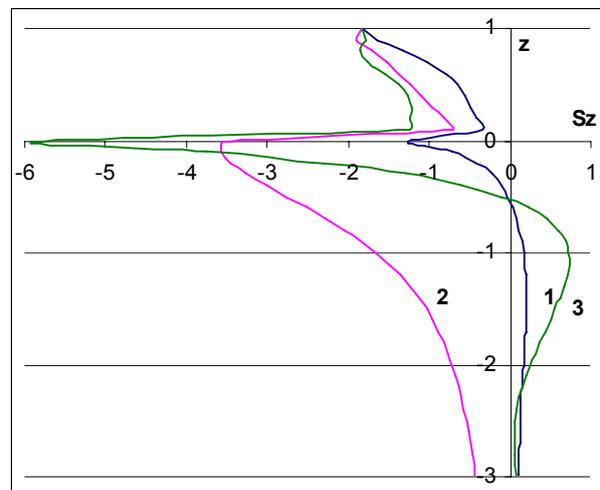


Рис. 6.

Построенные графики наглядно иллюстрируют влияние учета податливости соединения на закономерности распределения перемещений и напряжений. Предложенный алгоритм позволяет рассчитывать картину деформации в произвольной точке конструкции с неидеальными связями.

Перечень ссылок

1. Горшков А. В. Пластины и оболочки на упругом на упругом основании при действии подвижных нагрузок / А. В. Горшков, В. И. Пожуев. – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 336 с.

2. Jones J. P. Waves at a flexibly bonded interface / J. P. Jones, J. S. Whitter // Trans/ ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1967. – Vol. 34. – N 4. – P. 178–183.
3. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. – М. : Наука, 1966. –370 с.

Одержано 29.11.2010

Пожуєв А.В., Михайлуца О.М. Нестационарна просторова деформація двошарової пластини скінчених розмірів з неідеальним зв'язками

Досліджується нестационарна реакція двошарової конструкції скінчених розмірів із пружним прошарком між шарами на дію нормального навантаження. Для побудови моделі використовувалися динамічні рівняння теорії пружності для шарів, прошарок підкоряється моделі Jones-Whittier. Рішення як для переміщення, так і для напруги в кожній точці конструкції отримані розкладанням у ряди Фур'є й методом інтегрального перетворення Лапласа, зіставлені з результатами для ідеального й жорсткого контактів між шарами.
Ключові слова: *пластина, прошарок, деформація, хвильове рівняння, ряд Фур'є, перетворення Лапласа, простір зображень, багаточлен Лежандра.*

Pozhuev A., Mihaylutsa E. Non-stationary spatial deformation of the final sizes two-layer plate with non-ideal communication

Non-stationary reaction of final sizes two-layer construction with an elastic filler between layers over action of normal loading is investigated. For model construction the dynamic equations of elasticity theory for layers were used, the filler submits to model Jones-Whittier. Decisions both for a deflection, and for pressure in each point the designs received by decomposition in Furie numbers and a Laplasa method of integrated transformation, are compared with results for ideal and rigid contacts between layers
Key words: *plate, layer, deformation, the wave equation, number of Furie, transformation of Laplasa, space of images, multinomial of Lezhandra.*
