

$$\mu < -\frac{4(10\beta + 3\gamma)}{5(7\gamma - 10\beta)}. \quad (24)$$

Таким образом, при  $\gamma = \frac{10}{7}\beta$  равновесие  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  системы (19) асимптотически устойчиво, а при  $\gamma > \frac{10}{7}\beta$  ( $\gamma < \frac{10}{7}\beta$ ) оно асимптотически устойчиво при выполнении неравенства (23) (или (24)).

#### Перечень ссылок

1. Агафонов С. А. К вопросу устойчивости неконсервативных систем / С. А. Агафонов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – №1. – С. 47–51.
2. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
3. Kirillov O. N. Stabilization and destabilization of a circulatory system by small velocity-dependent forces / Kirillov O. N., Seyranian A. P. // J. of Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 283. – № 3–5. – P. 781–800.
4. Kirillov O. N. A theory of the destabilization paradox in non-conservative systems / Kirillov O. N. // Acta Mechanica. – 2005. – Vol. 174. – № 3–4. – P. 145–166.
5. Сейранян А. П. Парадокс дестабилизации в неконсервативных системах / А. П. Сейранян // Успехи математики. – 1990. – Т. 13. – № 2. – С. 89–124.
6. Hagedorn P. On the destabilizing effect of non-linear damping in nonconservative systems with follower forces / Hagedorn P. // Intern. J. Non – Linear Mech. – 1970. – Vol. 5. – № 2. – P. 341–358.
7. Агафонов С. А. Динамическая устойчивость стержня с нелинейной внутренней вязкостью под действием следящей силы / С. А. Агафонов, Д. В. Георгиевский // Докл. РАН. 2004. – Т. 396. – № 3. – С. 339–342.
8. Каменков Г. В. Избранные труды. Т.1. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика / Г. В. Каменков – М.: Наука, 1971. – 256 с.
9. Хазин Л. Г. Устойчивость критических положений равновесия / Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. – Пушкино: Центр биол. иссл. АН СССР, 1985. – 216 с.

Одержано 29.09.2010

#### Агафонов С.О., Костюшко И.А., Швидка С.П. До питання про стійкість циркулярної системи під дією дисипативних сил

*В роботі досліджується стійкість циркулярної системи під дією дисипативних сил. У критичному випадку двох пар чисто уявних коренів знайдено в термінах системи умову асимптотичної стійкості. Розглянуто також резонанс четвертого порядку.*

**Ключові слова:** циркулярна система, стійкість, дисипативні сили, критичний випадок, резонанс.

#### Agafonov S., Kostyushko I., Shvidkaya S. To the problem of circulatory system stability under the dissipative forces action

*Stability of the circulatory system under the dissipative forces action is analysed. At the critical case two pair of the pure imaginary roots in the terms of the asymptotic stability system terms the asymptotic stability condition is found. The resonance of the fourth order is expertized as well.*

**Key words:** circulatory system, stability, dissipative forces, critical case, resonance.

УДК 621.914.1

С. Ф. Лякун

Казенное предприятие «Научно-производственный комплекс «Искра», г. Запорожье

## МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ ПРИ РАЗРАБОТКЕ УПРАВЛЯЮЩИХ ПРОГРАММ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ НА СТАНКАХ С ЧПУ

*Описывается перерасчет через литейные уклоны плоских углов в трехгранных углах, необходимый при разработке управляющих программ для станков с числовым программным управлением при обработке трехгранных углов. Описывается дедуктивный метод определения углов, образованных при пересечении двухгранных углов плоскостью обработки.*

**Ключевые слова:** трехгранный угол, плоский угол, двухгранный угол, литейный уклон, метод математической дедукции, плоскость обработки.

При разработке управляющих программ для станков с числовым программным управлением (ЧПУ) на обработку трехгранных углов (ТГУ) используются как

исходные параметры плоские углы (ПУ) ТГУ. Но в чертежах на детали с ТГУ часто плоские углы не заданы, а заданы линейные углы (ЛУ) двухгранных углов

(ДУ). Причём, ЛУ могут быть  $\neq 90^\circ$ . Например, в пресс-форме закладываются литейные уклоны  $1^\circ \dots 5^\circ$ , и ЛУ ТГУ будут  $91^\circ \dots 95^\circ$ . ЛУ могут быть и больше  $95^\circ$

Для начала выведем формулу (необходимую в дальнейшем как образец) для вычисления угла, образованного при пересечении двугранного угла плоскостью обработки (рис. 1, фрагмент рис. 2).

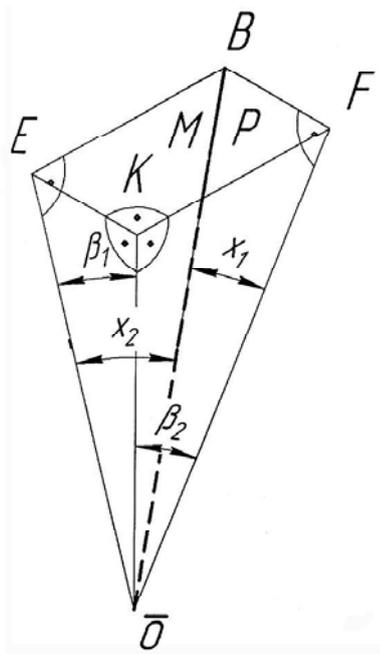


Рис. 1.

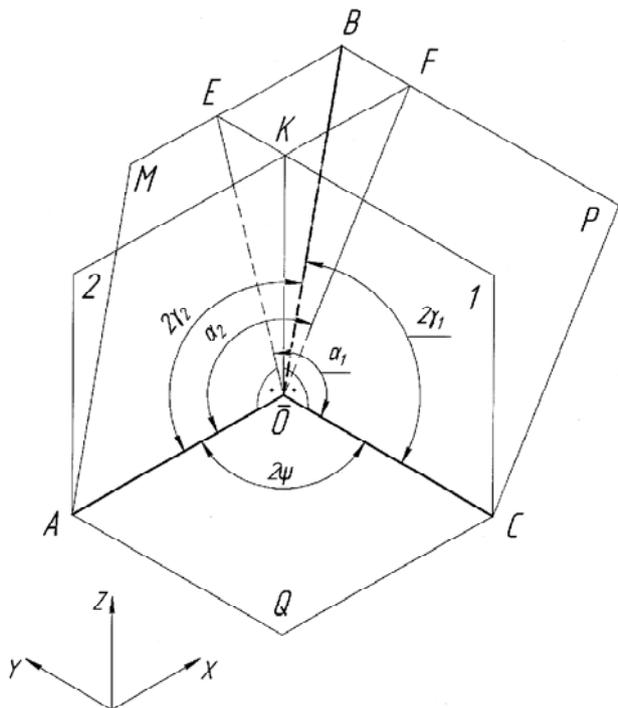


Рис. 2.

Дано:  $\beta_1, \beta_2$ , углы  $\angle \overline{OKE} = \angle \overline{OKF} = \angle \overline{EKF} = 90^\circ$   
 Необходимо вычислить угол КФЕ  $\{K\overline{F}E\}$  на плоскости обработки  $P\{M\}$ .

Здесь и далее фасонные скобки  $\{.....\}$  применены для сокращения повторений. Например, выражение с фасонными скобками, которое приведено выше, надо читать как два выражения:

1) Необходимо вычислить угол  $K\overline{O}E$  на плоскости обработки  $P$ .

2) Необходимо вычислить угол  $K\overline{O}F$  на плоскости обработки  $M$ .

Принимаем  $\overline{OK}=1$

Из  $\Delta OKE \{ \Delta KF \}$  следует:

$$1) KE \{ KF \} = \overline{OK} \{ \text{tg} \beta_1 \{ \text{tg} \beta_2 \} = 1 \quad \text{tg} \beta_1 \{ \text{tg} \beta_2 \} = \text{tg} \beta_1 \{ \text{tg} \beta_2 \} = BF \{ BE \};$$

$$2) \overline{OF} \{ \overline{OE} \} = \frac{\overline{OK}}{\cos \beta_2 \{ \cos \beta_1 \}} = \frac{1}{\cos \beta_2 \{ \cos \beta_1 \}};$$

3) Из  $\Delta \overline{OBF} \{ \Delta \overline{OBE} \}$  следует

$$\text{tg} X_1 \{ \text{tg} X_2 \} = \frac{BF \{ BE \}}{OF \{ OE \}}.$$

Подставим в эту формулу значение  $\overline{OF} \{ \overline{OE} \}$ , вычисленное в пункте 2, получим:

$$\text{tg} X_1 \{ X_2 \} = \frac{BF \{ BE \}}{1} = BF \{ BE \} \cos \beta_2 \{ \cos \beta_1 \},$$

где  $X_1 = 2\gamma_1 - 90^\circ$ ;  $X_2 = 2\gamma_2 - 90^\circ$  (рис. 2).

Можно написать общую формулу:

$$\text{tg} (2 \gamma_{1,2} - 90^\circ) = \text{tg} \beta_{1,2} \cos \beta_{2,1} \quad (1a)$$

Вычисление или проверка плоских углов (ПУ) ТГУ могут быть осуществлены также методом математической дедукции [1].

«Дедукция наряду с синтезом, анализом, индукцией и аналогией, является одним из научных методов исследований» [1].

На рис. 2 изображен ТГУ  $\overline{O}ABC$  в изометрии, в котором вершина обозначена т.  $\overline{O}$ , ребра –  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ , плоские углы (ПУ)  $\overline{BOA} = 2\gamma_2$ ,  $\overline{BOC} = 2\gamma_1$ ,  $\overline{AOC} = 2\psi$  [2, 3].

Через стороны ПУ проходят плоскости граней ТГУ –  $\overline{VOA}$ ,  $\overline{VOC}$ ,  $\overline{AOC}$ . Грань  $\overline{AOC}$ , расположенная на плоскости  $Q$ , является основанием, перпендикулярным оси шпинделя и параллельным плоскости, на которой установлена деталь с ТГУ.

Двугранные углы ТГУ  $\overline{MAOQ}$ ,  $\overline{PCOQ}$  и  $\overline{MBOQ}$  измеряются линейными углами (соответственно  $\alpha_1, \alpha_2$ ) и углом между плоскостями  $M$  и  $P$ , который при  $\alpha_1, \alpha_2 = 90^\circ$  (стороны ЛУ перпендикулярны ребру) равен  $2\psi$ .

Плоскости  $P, M, Q$  (плоскости обработки) получают обработкой детали. Плоскость обработки  $P\{M, Q\}$ ,

пересекая ДУ  $MA\bar{O}Q\{PC\bar{O}Q, MB\bar{O}P\}$ , образует угол  $2\gamma_1\{2\gamma_2, 2\psi\}$ .

Литейные уклоны вычислим следующим образом:

1) Для грани  $B\bar{O}A$  (плоскость  $M$ )  $\beta_1 = \alpha_1 - 90^\circ = \angle K\bar{O}E$

2) Для грани  $B\bar{O}C$  (плоскость  $P$ )  $\beta_2 = \alpha_2 - 90^\circ = \angle K\bar{O}F$ .

Будем рассматривать уклоны  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (наклоны плоскостей  $M$  и  $P$ ) в пределах от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ .

Через стороны линейных углов  $C\bar{O}E$  и  $A\bar{O}F$  проведем взаимноперпендикулярные плоскости 1 и 2 соответственно. Это положение плоскостей 1 и 2 с наклоном  $0^\circ$  будем считать точкой 1 для дедукции.

Наклоним каждую плоскость 1 и 2, вращая вокруг прямых  $OC$  и  $OA$  соответственно, лежащих на плоскости  $Q$  основания, до совмещения с плоскостью  $Q$ . Это положение считаем как наклон  $90^\circ$  – точка 2 для дедукции. Значение литейных уклонов  $X$ , в зависимости от наклона от точки 1 дедукции к точке 2 дедукции, можно рассматривать как произведение  $f(\beta)$  (функции от литейного уклона  $\beta$ ) на коэффициент  $k$ , который меняется от  $k = 1$  в точке 1 дедукции до  $k = 0$  в точке 2 дедукции.

Значение  $k$  в точках дедукции совпадает со значением косинусов соответствующих углов в точках дедукции

$$k_1 = \cos\beta_2; \quad k_2 = \cos\beta_1. \quad (1 \text{ б})$$

При наклоне  $0^\circ$  литейные уклоны  $\beta_1$  и  $\beta_2$  не изменятся.

$$\beta_1 = k_1 f(\beta_1), \text{ где } k_1 = 1 = \cos\beta_2 (\beta_2 = 0^\circ),$$

$$\beta_2 = k_2 f(\beta_2), \text{ где } k_2 = 1 = \cos\beta_1 (\beta_1 = 0^\circ).$$

При наклоне на угол  $90^\circ$  литейные уклоны изменятся, будут равны  $0^\circ$

$$\beta_{1,2} = k_{1,2} f(\beta_{1,2}), \text{ где } k_{1,2} = 0 = \cos\beta_{2,1} (\beta_{2,1} = 90^\circ).$$

Литейные уклоны  $\beta$  и плоские углы  $\gamma$  выразим через соотношение катетов ( $\text{tg}2\gamma, \text{tg}\beta$ ) в треугольнике, построенном на сторонах углов  $2\gamma$  и  $\beta$

$$\text{tg}(2\gamma_{1,2} - 90^\circ) = \text{tg}\beta_{1,2} \cos\beta_{2,1} \quad (1)$$

Сравним и убедимся, что формулы (1) и ранее выведенная (1 а) одинаковые (области определения также одинаковые).

В результате приведенных выше расчетов, при наклоне на угол  $\beta = 0^\circ \dots 90^\circ$ , плоские углы ТГУ будут:

$$2\gamma_1 = \text{arctg}(\text{tg}\beta_1 \cos\beta_2) + 90^\circ; \quad (2)$$

$$2\gamma_2 = \text{arctg}(\text{tg}\beta_2 \cos\beta_1) + 90^\circ. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) справедливы когда плоский угол  $A\bar{O}C$  прямой, т.е.  $2\psi = 90^\circ$ .

Если  $2\psi \neq 90^\circ$ , то в формуле (2) перевычислить:

$$\beta_2 = \text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\beta'_2}{\sin 2\psi}\right). \quad (4)$$

В формуле (3) перевычислить:

$$\beta_1 = \text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\beta'_1}{\sin 2\psi}\right), \quad (5)$$

где  $2\psi = [0^\circ \dots 90^\circ \dots 180^\circ] = \text{const}$ ,

функция  $\beta_{1,2}$  – литейный уклон перевычисленный, аргумент  $\beta'_{1,2}$  – литейный уклон до перевычисления, заданный в чертеже, а  $(\beta'_{1,2} + 90^\circ)$  – это линейный угол двугранного угла.

Если плоскости  $M$  и  $P$  вращать вокруг неподвижной линии  $\bar{O}K$ , изменяя угол  $2\psi = 0^\circ \dots 180^\circ$ , то при любом значении литейного уклона ( $\alpha_{1,2} - 90^\circ$ ) (углы При  $2\psi = 0^\circ$ , точки  $A$  и  $C$  сольются по одну сторону от точки  $\bar{O}$ , а точки  $E$  и  $F$  сольются в бесконечности по другую сторону от точки  $\bar{O}$ , и все эти точки будут лежать на одной прямой.

При  $2\psi = 180^\circ$ , точки  $A, E$  и  $C, F$  будут лежать на одной прямой по разные стороны от точки  $\bar{O}$ .

В итоге нами получены три точки для дедукции с координатами:

№ точки п/п	1	2	3
аргумент $2\psi$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
функция $\beta_{1,2}$	$90^\circ$	$\beta'_{1,2}$	$90^\circ$

Этим точкам соответствуют формулы (4) и (5), где коэффициент

$$k = \frac{1}{\sin 2\psi} \text{ (см. 1 б)}.$$

Они аналогичны (1 а).

Только (4) и (5) решены относительно  $\text{tg}\beta_{1,2}$ , и синус угла равен косинусу дополнительного угла ( $\sin 2\psi = \cos(90^\circ - 2\psi)$ ), а аргументом является  $2\psi$ .

Т.е. можно написать  $\text{tg}\beta' = \text{tg}\beta \cos(90^\circ - 2\psi)$  и сравнить с (1 а) или (1).

Убедимся, что (4) и (5) определены на всем интервале аргумента  $0^\circ \dots 180^\circ$ , а не только в точках дедукции. Формулы (4) и (5) аналогичны зависимости (1 а) и (1). Они определены на отрезке  $\cos\beta$ , где  $\beta = 0 \dots 90n$ , где  $n$  – натуральный ряд.

Наш интервал  $0 \dots 180^\circ$  принадлежит множеству  $0^\circ \dots 90^\circ n$ , т.е. таким образом мы убедились, что множество  $0^\circ \dots 180^\circ$  принадлежит множеству  $0^\circ \dots 90^\circ n$  (при  $n = 2$ ).

Но можно сделать вывод и методом дедукции.

По аналогии с [2] (дедукция, пример о Сократе), отрезок  $(0^\circ \dots 90^\circ n)$  является областью определения формулы (1) (большая посылка). Значения (элементы)  $(0^\circ; 90^\circ$  и  $180^\circ)$  определены для формул (4) и (5), и эти формулы могут быть получены из (1) (малая посылка).

Вывод: (4) и (5) определены на отрезке  $0^\circ \dots 180^\circ$ . Если в дроби формул (4) и (5) знаменатель стре-

митя к 0, то дробь стремится к бесконечности, а арктангенс этой дроби стремится к 90°.

Описанный метод расчета на практике может быть применен для разработки управляющих программ для станков с ЧПУ при изготовлении волноводов РЛС и прессформ.

#### Перечень ссылок

1. Толковый словарь математических терминов / [О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. И. Соркин и др.] ; под ред. проф. В. А. Диткина. – М. : Просвещение, 1965. – 98 с.
2. Бронштейн И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М., 1964. – 170 с.
3. Справочник по элементарной математике / [ред. П. Ф. Фильчаков]. – К. : Наукова думка, 1972. – 528 с.

Одержано 29.04.2010

Після доробки 20.10.2010

#### Лякун С.Ф. Метод обчислення тригранних кутів при розробці керуючих програм для механічної обробки деталей на верстатах з ЧПК

*Описується перерахунок через ливарні ухили плоских кутів у тригранних кутах, необхідний при розробці керуючих програм для верстатів з числовим програмним керуванням при обробці тригранних кутів. Описується дедуктивний метод визначення кутів, утворених при перетинанні двогранних кутів площиною обробки.*

**Ключові слова:** тригранний кут, плоский кут, двогранний кут, ливарний ухил, метод математичної дедукції, площину обробки.

#### Lyakun S. The method of trihedral angles calculating at control programs development for machining of parts on the numerical-controlled machine tools

*The recalculation of plane angles in trihedral angles through pattern tapers is described, being required for development of control programs for the NC machine tools when machining the trihedral angles. The deductive method is described to determine the angles formed at intersection of dihedral angles by a plane of machining.*

**Key words:** trihedral angle, flat angle, dihedral angle, cast slope, method of mathematical deduction, the plane processing.

УДК 539.3

Д-р техн. наук А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина

Государственная инженерная академия, г. Запорожье

## ВЫВОД УТОЧНЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА БАЛКИ ПРИ ПОМОЩИ АСИМПТОТИКО-ГРУППОВОГО АНАЛИЗА УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*При помощи метода асимптотико-группового анализа из трехмерных динамических уравнений теории упругости получены уточненные одномерные динамические уравнения изгиба балки, более точные, чем известные. В частности найденные уравнения описывают распространение двух типов волн, причем фронты этих волн движутся с теми же скоростями, как у продольных и поперечных волн в трехмерной упругой среде. Отметим, что классические уравнения изгиба балки имеют параболический тип, т.е. не описывают фронтов волн, а уравнения типа Тимошенко задают скорости фронтов волн, не совпадающие со скоростями фронтов в трехмерной среде.*

**Ключевые слова:** асимптотико-групповой анализ, уточненные динамические уравнения изгиба стержня, деформация, изгибающий момент, перерезывающая сила, продольные волны, поперечные волны.

В работе [1] изложена процедура получения уточненных динамических уравнений обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба пластины на основе трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа. При этом реализовано, так называемое, минимальное упр-

рошение трехмерных уравнений, приводящее к двумерным уравнениям. В данной работе рассматривается более сильное упрощение трехмерных уравнений, которое, в результате совмещения двух минимальных упрощений приводит к уточненным одномерным уравнениям изгиба балки. Таким образом, получаются