

## НЕСТАЦІОНАРНА НЕВІСЕСИМЕТРИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ПРУЖНОМУ ПРОСТОРИ ПІД ДІЄЮ РУХОМИХ ПОВЕРХНЕВИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Розглядається нескінченна циліндрична оболонка, яка знаходиться у тривимірному пружному інерційному просторі. Вивчається випадок, коли до внутрішньої поверхні оболонки прикладаються невісесиметричні врівноважені імпульсивні нормальні навантаження. Отримано вирази для нормальних переміщень та напружень і проілюстровано графічно їх розподіл за кутовою координатою для різних моментів часу.

**Ключові слова:** циліндрична оболонка, пружний простір, динамічне навантаження, невісесиметрична задача, оболонка типу Тимошенко.

### Вступ

Задачі про стаціонарну динамічну поведінку нескінченно довгих циліндричних оболонок, які знаходяться в необмеженому інерційному пружному середовищі під дією рухомих навантажень раніше розглядалися в роботах [1–3], а також в монографії [4]. У роботах [5, 6] розглянуті подібні задачі у нестационарній постановці, але розгляд обмежено випадками, коли для оболонки використовуються класичні рівняння, а для опису реакції середовища використовується наближена модель типу Власова-Пастернака, яка не дозволяє знайти напруження і переміщення у пружному просторі та обмежує дослідження нестационарної поведінки оболонки.

### Постановка задачі

Розглядається невісесиметрична нестационарна деформація нескінченно довгої циліндричної оболонки, яка знаходиться у лінійно-пружному, однорідному та ізотропному просторі під дією навантажень, що рухаються по внутрішній поверхні оболонки вздовж осі оболонки. Нехай оболонка та простір віднесені до нерухомої циліндричної системи координат  $\{r, \theta, x\}$ . Внутрішній радіус оболонки  $b$ , а зовнішній –  $a$ . У момент часу  $t < 0$  оболонка та простір знаходяться в стані спокою та вільні від напружень. Потім у момент часу  $t = 0$  в області  $x = 0, r = b, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, -\theta_2 \leq \theta \leq -\theta_1$  ( $\theta_1 \leq \theta_2, \theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$ ) прикладається імпульсивне нормальне навантаження  $F_0$  і у подальші моменти часу  $t > 0$  відбувається розширення навантаженої ділян-

ки з постійною швидкістю  $c$ , але так, що сумарний нормальний тиск у всі моменти часу залишається рівним  $F_0$ . Також розглядається випадок, коли в момент часу  $t = 0$  в області

$$|x| \leq d, r = b, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, -\theta_2 \leq \theta \leq -\theta_1$$

( $\theta_1 \leq \theta_2, \theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$ ) прикладається імпульсивне нормальне навантаження  $F_0$ , яке постійно діє на даній ділянці.

У даній роботі рух оболонки будемо описувати за допомогою рівнянь, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко). Контакт між простором та оболонкою вважаємо ковзним, а зв'язок – двостороннім. Середовище, що оточує оболонку, описується динамічними рівняннями теорії пружності.

У векторній формі динамічні рівняння теорії пружності мають вигляд [9]:

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \text{grad div}(\bar{u}) - \mu_2 \text{rot rot}(\bar{u}) = \rho_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Тут  $\bar{u} = (u_x, u_\theta, u_r)$  – вектор переміщень;  $\lambda_2, \mu_2$  – параметри Ламе для простору,  $\rho_2$  – щільність простору.

Рух оболонки описується рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), та в загальному випадку мають вигляд [10]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} - \\ & - \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_x \\ & \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \\ & + \frac{1}{a^2} \left( 1 + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2a} \chi_\theta - \\ & - \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_\theta \\ & \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{w}{a^2} + \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \\ & = - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (-f + q_r) \\ & - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x^2} - \\ & - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \chi_x + \frac{1-\nu_1}{2a^2} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial \theta^2} - \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \\ & \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial t^2} = - \frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_x \\ & - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{ah^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x^2} - \\ & - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \chi_\theta + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial \theta^2} - \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \\ & \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial t^2} = - \frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_\theta, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

де  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – осьове, кільцеве та нормальне переміщення точок серединної поверхні оболонки відповідно;  $\chi_x$ ,  $\chi_\theta$  – кути повороту нормалі до серединної поверхні в осьовому і кільцевому напрямках;  $q_r$ ,  $q_x$ ,  $q_\theta$  – нормальна, осьова та кільцева реакція з боку простору на границі контакту між простором та оболонкою;  $f$  – нормальне навантаження;  $G_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\nu_1$ ,  $h$ ,  $a$  – модуль зсуву, густина, коефіцієнт Пуассона, товщина та зовнішній радіус оболонки;  $k^2 = \frac{2}{3}$  – числовий коефіцієнт.

При відсутності масових сил вводимо потенціальні функції  $\phi$ ,  $\varphi$ ,  $\chi$  за формулами [9]

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \\ u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial \chi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Підставляємо залежності (3) в рівняння (1).

Маємо:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0; \\ & \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0; \\ & \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$c_1^2 = \frac{2G_2(1-\nu_2)}{\rho_2(1-2\nu_2)}, \quad c_2^2 = \frac{G_2}{\rho_2}. \quad (5)$$

Граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} q_r(x, t, \theta) &= -\sigma_{rr}(a, x, t, \theta), \\ q_x(x, t, \theta) &= q_\theta(x, t, \theta) = 0, \\ w(x, t, \theta) &= u_r(a, x, t, \theta), \\ \sigma_{rx}(a, x, t, \theta) &= \sigma_{r\theta}(a, x, t, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Напруження, необхідні для задоволення граничних умов, виражаються через переміщення згідно з формулою:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2G_2\nu_2}{1-2\nu_2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \\ & + \frac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{rx} &= G_2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= G_2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Початкові умови приймаються нульовими, тобто при  $t = 0$  шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

### Розв'язання задачі у просторі зображень

Для розв'язання задачі будемо використовувати перетворення Лапласа за часовою змінною:

$$f_L(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (8)$$

та перетворення Фур'є за осью координатою:

$$f_F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx} dx. \quad (9)$$

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \{\Phi, X\} &= \frac{1}{a^2} \{\phi, \chi\}; \quad \{\Psi\} = \frac{1}{a^3} \{\phi\}; \\ \{U_x, U_\theta, U_r, U, V, W\} &= \frac{1}{a} \{u_x, u_\theta, u_r, u, v, w\}; \\ \{\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rx}, \bar{\sigma}_{r\theta}\} &= \frac{1}{G_1} \{\sigma_{rr}, \sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}\}; \\ F &= \frac{f}{G_1}; \quad \{\bar{q}_r, \bar{q}_x, \bar{q}_\theta\} = \frac{1}{G_1} \{q_r, q_x, q_\theta\} \\ \{x_*, r_*\} &= \frac{1}{a} \{x, r\}; \quad \tau = \frac{c_s}{a} t; \quad \kappa = \frac{h}{a}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \\ \rho^* &= \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad d_1 = 1 - \kappa; \quad c_s = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{\rho_1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Застосуємо перетворення Лапласа за змінною  $\tau$  та перетворення Фур'є за змінною  $x_*$  до рівнянь (4) та розкладаємо зображення потенціальних функцій у ряд Фур'є за формулами:

$$\begin{aligned} \{\Phi_{LF}, \Psi_{LF}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{\Phi_{LF,n}, \Psi_{LF,n}\} \cos(n\theta), \\ X_{LF} &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{LF,n} \sin(n\theta). \end{aligned} \quad (11)$$

Рівняння (4) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r_*^2} - \eta_r^2 p^2 - s^2 \right) \Phi_{LF,n} &= 0; \\ \left( \frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r_*^2} - \eta_s^2 p^2 - s^2 \right) \Psi_{LF,n} &= 0; \\ \left( \frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r_*^2} - \eta_s^2 p^2 - s^2 \right) X_{LF,n} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{де } \eta_r^2 = \frac{\gamma}{\rho^*} \frac{1 - 2\nu_1}{2(1 - \nu_1)}; \quad \eta_s^2 = \frac{\gamma}{\rho^*}.$$

Загальний розв'язок рівнянь (12) з урахуванням умов затухання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{1n}(s, p) K_n(m_r r_*); \\ \Psi_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{2n}(s, p) K_n(m_s r_*); \\ X_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{3n}(s, p) K_n(m_s r_*), \end{aligned} \quad (13)$$

де  $m_r = \sqrt{s^2 + \eta_r^2 p^2}$ ,  $m_s = \sqrt{s^2 + \eta_s^2 p^2}$ , а  $K_n$  – модифіковані функції Бесселя.

Застосуємо перетворення Лапласа за змінною  $\tau$  та перетворення Фур'є за змінною  $x_*$  до компонент переміщень і напружень та розкладаємо їх у ряд Фур'є за формулами:

$$\begin{aligned} \{U_{rLF}, U_{xLF}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{rLF,n}, U_{xLF,n}\} \cos(n\theta), \\ \{\bar{\sigma}_{rrLF}, \bar{\sigma}_{rxLF}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{\bar{\sigma}_{rrLF,n}, \bar{\sigma}_{rxLF,n}\} \cos(n\theta), \\ \{U_{\theta LF}, \bar{\sigma}_{r\theta LF}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{\theta LF,n}, \bar{\sigma}_{r\theta LF,n}\} \sin(n\theta). \end{aligned} \quad (14)$$

Рівності (7) та (3) мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} U_{xLF,n} &= is\Phi_{LF,n} + \left( \frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr_*} - \frac{n^2}{r_*^2} \right) \Psi_{LF,n}, \\ U_{rLF,n} &= \frac{d\Phi_{LF,n}}{dr_*} - is \frac{d\Psi_{LF,n}}{dr_*} + \frac{n}{r_*} X_{LF,n}, \\ U_{\theta LF,n} &= -\frac{n}{r_*} \Phi_{LF,n} + \frac{isn}{r_*} \Psi_{LF,n} - \frac{dX_{LF,n}}{dr_*}. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rrLF,n} &= \frac{2\nu_2}{(1 - 2\nu_2)\gamma} \left( isU_{xLF,n} + \frac{n}{r_*} U_{\theta LF,n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{U_{rLF,n}}{r_*} \right) + \frac{2(1 - \nu_2)}{(1 - 2\nu_2)\gamma} \frac{dU_{rLF,n}}{dr_*}, \\ \bar{\sigma}_{rxLF,n} &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{dU_{xLF,n}}{dr_*} + isU_{rLF,n} \right), \\ \bar{\sigma}_{r\theta LF,n} &= \frac{1}{\gamma} \left( -\frac{n}{r_*} U_{rLF,n} + \frac{d}{dr_*} \left( \frac{U_{\theta LF,n}}{r_*} \right) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Розкладаємо зображення шуканих величин у ряд Фур'є таким чином:

$$\begin{aligned} \{U_{LF}, W_{LF}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{LF,n}, W_{LF,n}\} \cos(n\theta), \\ V_{LF} &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{LF,n} \sin(n\theta), \\ \{\bar{q}_{rLF}, \bar{q}_{xLF}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{\bar{q}_{rLF,n}, \bar{q}_{xLF,n}\} \cos(n\theta), \\ \{\chi_{xLF}, F_{LF}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{\chi_{xLF,n}, F_{LF,n}\} \cos(n\theta), \\ \{\bar{q}_{\theta LF}, \chi_{\theta LF}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{\bar{q}_{\theta LF,n}, \chi_{\theta LF,n}\} \sin(n\theta). \end{aligned} \quad (17)$$

У просторі зображень за Фур'є-Лапласом система (2) має вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} &-\left(\frac{1-v_1}{2}(n^2+p^2)+s^2\right)U_{LF,n} + isn\frac{1+v_1}{2}V_{LF,n} + \\ &+ v_1 is W_{LF,n} = -\frac{1-v_1}{2\kappa} \bar{q}_{xLF,n} \\ &- isn\frac{1+v_1}{2}U_{LF,n} - \left(\frac{1-v_1}{2}(s^2+p^2)+n^2\right)V_{LF,n} - \\ &- n\left(1+\frac{(1-v_1)k^2}{2}\right)W_{LF,n} + \frac{(1-v_1)k^2}{2}\chi_{\theta LF,n} = \\ &= -\frac{1-v_1}{2\kappa^2} \bar{q}_{\theta LF,n} \\ &isv_1 U_{LF,n} + nV_{LF,n} - k^2\frac{1-v_1}{2}(is\chi_{xLF,n} + n\chi_{\theta LF,n}) + \\ &+ \left(\frac{1-v_1}{2}((s^2+n^2)k^2+p^2)+1\right)W_{LF,n} = \\ &= -\frac{1-v_1}{2\kappa}(\bar{q}_{rLF,n} - F_{LF,n}) \\ &- 6k^2 is\frac{1-v_1}{\kappa^2}W_{LF,n} + isn\frac{1+v_1}{2}\chi_{\theta LF,n} - (s^2 + \\ &+ \frac{1-v_1}{2}\left(\frac{12k^2}{\kappa^2}+n^2+p^2\right))\chi_{xLF,n} = \\ &= -\frac{3(1-v_1)}{\kappa^2} \bar{q}_{xLF,n} \\ &6k^2 n\frac{1-v_1}{\kappa^2}W_{LF,n} - isn\frac{1+v_1}{2}\chi_{xLF,n} - (n^2 + \\ &+ \frac{1-v_1}{2}\left(\frac{12k^2}{\kappa^2}+s^2+p^2\right))\chi_{\theta LF,n} = -\frac{3(1-v_1)}{\kappa^2} \bar{q}_{\theta LF,n}. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Граничні умови (6) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{rLF,n}(s,p) &= -\bar{\sigma}_{rrLF,n}(1,s,p), \\ \bar{q}_{xLF,n}(s,p) &= \bar{q}_{\theta LF,n}(s,p) = 0, \\ W_{LF,n}(s,p) &= U_{rLF,n}(1,s,p), \\ \bar{\sigma}_{rxLF,n} &= \bar{\sigma}_{r\theta LF,n}(1,s,p) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Враховуючи граничні умови (19), у системі (18) з четвертого та п'ятого рівнянь знаходимо невідомі функції  $\chi_{xLF,n}, \chi_{\theta LF,n}$ , а потім з першого та другого рівнянь знаходимо функції  $U_{LF,n}, V_{LF,n}$  відповідно:

$$\begin{aligned} \chi_{xLF,n}(s,p) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} W_{LF,n}(s,p); \\ \chi_{\theta LF,n}(s,p) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} W_{LF,n}(s,p); \\ U_{LF,n}(s,p) &= \frac{\Delta_4}{\Delta_3} W_{LF,n}(s,p) + \frac{\Delta_5}{\Delta_3} \chi_{\theta LF,n}(s,p); \\ V_{LF,n}(s,p) &= \frac{\Delta_6}{\Delta_3} W_{LF,n}(s,p) + \frac{\Delta_7}{\Delta_3} \chi_{\theta LF,n}(s,p), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \Delta &= \left(s^2 + \frac{1-v_1}{2}\left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + n^2 + p^2\right)\right) \times \\ &\times \left(n^2 + \frac{1-v_1}{2}\left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + s^2 + p^2\right)\right) - \left(sn\frac{1+v_1}{2}\right)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -6k^2 is\frac{1-v_1}{\kappa^2}(n^2 + \\ &+ \frac{1-v_1}{2}\left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + s^2 + p^2\right)) - 3is(kn)^2\frac{1-v_1^2}{\kappa^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 6k^2 n\frac{1-v_1}{\kappa^2}(s^2 + \\ &+ \frac{1-v_1}{2}\left(\frac{12k^2}{\kappa^2} + n^2 + p^2\right)) + 3n(ks)^2\frac{1-v_1^2}{\kappa^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \left(\frac{1-v_1}{2}(s^2+p^2)+n^2\right) \times \\ &\times \left(\frac{1-v_1}{2}(n^2+p^2)+s^2\right) - \left(sn\frac{1+v_1}{2}\right)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= isv_1\left(\frac{1-v_1}{2}(s^2+p^2)+n^2\right) - \\ &- isn^2\frac{1+v_1}{2}\left(1+\frac{(1-v_1)k^2}{2}\right); \end{aligned}$$

$$\Delta_5 = -isn\frac{1+v_1}{2}\frac{(1-v_1)k^2}{2};$$

$$\begin{aligned} \Delta_6 &= -n\left(1+\frac{(1-v_1)k^2}{2}\right) \times \\ &\times \left(\frac{1-v_1}{2}(n^2+p^2)+s^2\right) + s^2nv_1\frac{1+v_1}{2}; \end{aligned}$$

$$\Delta_7 = \frac{(1-v_1)k^2}{2} \left( \frac{1-v_1}{2} (n^2 + p^2) + s^2 \right).$$

Підставляємо вирази (20) в третє рівняння системи (18), а також, враховуючи граничні умови (19), отримуємо систему рівнянь відносно невідомих  $C_{1n}(s, p), C_{2n}(s, p), C_{3n}(s, p)$ . Розв'язавши отриману систему методом Гауса, підставляємо отримані розв'язки у співвідношення (15) та (16) і отримуємо вирази для переміщень та напружень у просторі зображень.

### Результати чисельного аналізу

Розглянемо випадок, коли в початковий момент часу  $t = 0$  в області  $x = 0, r = b, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{3}$  прикладається імпульсивне нормальне навантаження  $F_0$  і у подальший момент часу  $t > 0$  відбувається розширення навантаженої ділянки внутрішньої поверхні циліндричної оболонки з постійною швидкістю  $c$ .

Функція навантаження має вигляд:

$$f(x, t, \theta) = \frac{3F_0 H(ct - |x|)}{4\pi c t b} \left( H\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \times \right. \\ \left. \times H\left(-\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + H\left(-\theta - \frac{\pi}{3}\right) H\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right), \quad (21)$$

де  $H(x)$  – одинична функція Хевісайда.

Трансформанта навантаження (21) має вигляд:

$$F_{nLF}(s, p) = \frac{3F_0 \left( \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \right)}{a^2 \cdot 2\sqrt{2}\pi^2 d_1 s c^* n} \times \\ * \left( \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{p}{sc^*}\right) \right), \quad (22)$$

де  $c^* = \frac{c}{c_s}$ .

Після оберненого перетворення Фур'є отримаємо вирази для трансформант Лапласа:

$$\frac{U_{rL}(r_*, x_*, p, \theta) G_1 a^2}{F_0} = \frac{3}{4\pi^3 d_1 c^*} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \frac{U_{rLF,n}(r_*, s, p)}{s} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{p}{sc^*}\right) \right) \right. \\ \left. \cos(sx_*) ds \right] \left[ \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \right] \cos(n\theta), \quad (23)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rrL}(r_*, x_*, p, \theta) a^2}{F_0} = \frac{3}{4\pi^3 d_1 c^*} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \frac{\bar{\sigma}_{rLF,n}(r_*, s, p)}{s} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{p}{sc^*}\right) \right) \right. \\ \left. \cos(sx_*) ds \right] \left[ \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \right] \cos(n\theta). \quad (24)$$

Розглянемо тепер випадок, коли в початковий момент часу  $t = 0$  в області  $|x| \leq d, r = b, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{3}$  прикладається імпульсивне нормальне навантаження  $F_0$ , яке постійно діє на даній ділянці. Функція навантаження має вигляд:

$$f(x, t, \theta) = F_0 H(|x| - d) H(t) \left( H\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \right. \\ \left. H\left(-\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + H\left(-\theta - \frac{\pi}{3}\right) H\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right). \quad (25)$$

Трансформанта навантаження (23) має вигляд:

$$F_{nLF}(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^* s)}{\pi^2 s p} \times \\ \times \left( \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \right), \quad (26)$$

де  $d^* = \frac{d}{a}$ .

Після оберненого перетворення Фур'є отримаємо вирази для трансформант Лапласа:

$$\frac{U_{rL}(r_*, x_*, p, \theta) G_1}{F_0} = \frac{1}{\pi^2 p} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \frac{\sin(d^* s) U_{rLF,n}(r_*, s, p)}{s} \right. \\ \left. \cos(sx_*) ds \right] \left[ \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \right] \cos(n\theta), \quad (27)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rrL}(r_*, x_*, p, \theta)}{F_0} = \frac{1}{\pi^2 p} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \frac{\sin(d^* s) \bar{\sigma}_{rLF,n}(r_*, s, p)}{s} \right. \\ \left. \times \cos(sx_*) ds \right] \left[ \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \right] \cos(n\theta). \quad (28)$$

Обчислення невластних інтегралів у виразах (23), (24), (27), (28) здійснювалось наближено з використанням метода Файлона [7], обернення перетворення Лапласа здійснювалось чисельно за допомогою зміщених поліномів Лежандра [8].

Розрахунки проведено для таких значень безрозмірних параметрів:  $v_1 = v_2 = 0,3$ ,  $\gamma = 30$ ,  $\rho^* = 4$ ,  $\kappa = 0,02$ ,  $d_1 = 1 - \kappa = 0,98$ ,  $d^* = \frac{1}{2}$ ,  $c^* = 0,4$ ,  $x_* = 0$ ,  $r_* = 1$ . Величини  $\theta$ ,  $\tau$  – змінювались.

Рис. 1 ілюструє зміну нормальних переміщень, для навантажень (21), за кутовою координатою на межі контакту оболонки і пружного простору ( $r_* = 1$ ,  $x_* = 0$ ), для різних значень безрозмірного часу, при цьому для кривої 1 –  $\tau = 1$ , для 2 –  $\tau = 3$ , 3 –  $\tau = 10$ . На рис. 2 приведені аналогічні результати для нормальних напружень, але для кривої 1 –  $\tau = 0,1$ .

На рис. 3 та рис. 4 для навантаження (25) показано зміну нормальних переміщень та нормальних напружень за кутовою координатою на границі контакту оболонки і пружного простору ( $r_* = 1$ ,  $x_* = 0$ ) у різні моменти безрозмірного часу, при цьому для кривої 1 –  $\tau = 1$ , для 2 –  $\tau = 3$ , 3 –  $\tau = 10$ .

### Висновки

Отримано розв’язок невісесиметричної динамічної задачі для циліндричної оболонки у пружному просторі. При цьому вирази для переміщень і напружень у оболонці і довільній точці простору подано у вигляді подвійних невластних інтегралів Фур’є та Лапласа від рядів Фур’є. Для отримання результатів запропоновано ефективний чисельний алгоритм, який ґрунтується на методі Файлона та многочленів Лежандра.

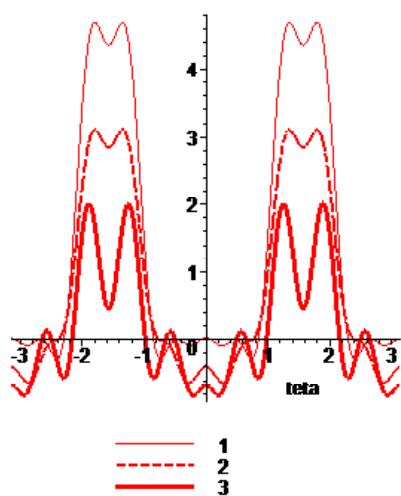


Рис. 1. Розподіл нормальних переміщень оболонки за кутовою координатою в різні моменти часу, для навантаження, що розбігається

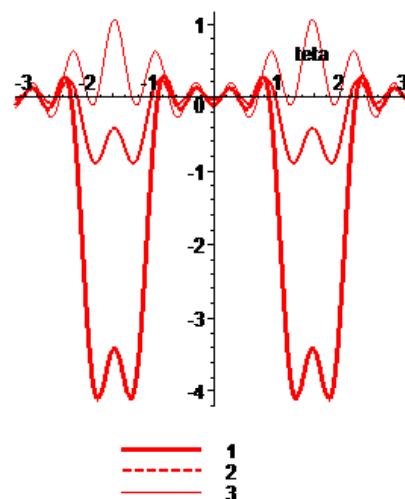


Рис. 2. Розподіл нормальних напружень оболонки за кутовою координатою в різні моменти часу, для навантаження, що розбігається

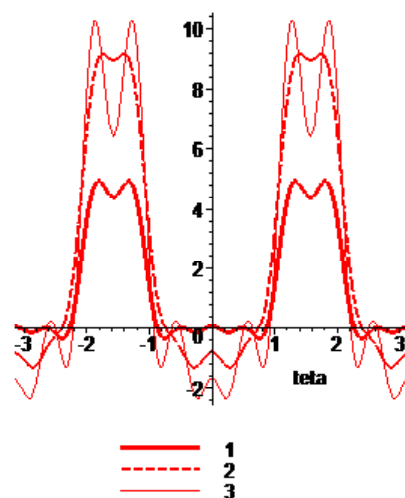


Рис. 3. Розподіл нормальних переміщень оболонки за кутовою координатою в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

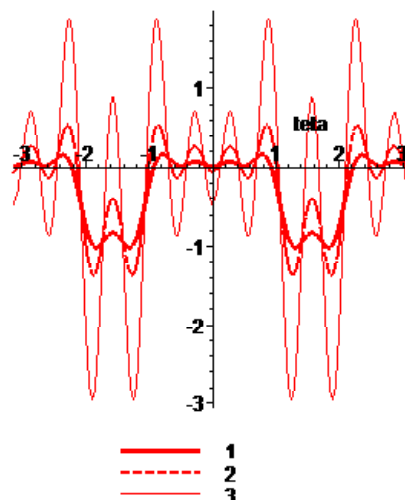


Рис. 4. Розподіл нормальних напружень оболонки за кутовою координатою в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

Проілюстровано графічно розподіл за кутовою координатою в різні моменти часу нормальних переміщень та напружень оболонки на межі контакту з пружним простором. Показано, що для навантаження, що розбігається, нормальні переміщення та напруження зі збільшенням часу збігаються до нуля. Отримані результати і запропоновані алгоритми можуть використовуватись при динамічному розрахунку підземних споруд, зокрема тунелів метро та підземних трубопроводів.

#### Список літератури

1. Львовский В. М. Установившиеся колебания цилиндрической оболочки в упругой среде под действием подвижной нагрузки / Львовский В. М., Онищенко В. И., Пожуев В. И. – Вопросы прочности и пластичности. – Днепропетровск. 1974 – С. 98–110.
2. Пожуев В. И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде / Пожуев В. И. // Строительная механика и расчет сооружений. – 1976. – № 1. – С. 44–46.
3. Пожуев В. И. Реакция цилиндрической оболочки, находящейся в трансверсально-изотропной среде, на действие подвижной нагрузки / Пожуев В. И. // Прикладная механика. – 1980 – т. 16 – № 11. – С. 28–35.
4. Горшков А. Г. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок / Горшков А. Г., Пожуев В.И. – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 136 с.
5. Пожуев В. И. Нестационарная реакция цилиндрической оболочки в упругой среде на действие неосесимметрической подвижной нагрузки / Пожуев В. И., Жибитай Мохаммед. – Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 6. – С. 33–37.
6. Пожуев В. И. Нестационарные колебания трубопровода конечной длины, односторонне взаимодействующего с инерционной средой / Пожуев В. И., Жибитай Мохаммед. – Изв. ВУЗов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 48–50.
7. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / Крылов В. И., Шульгина Л. Т. – М. : Наука, 1966. – 370 с.
8. Крылов В. И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / Крылов В. И., Скобля Н. С. – М. : Наука, 1974. – 223 с.
9. Новацкий В. Теория упругости / Новацкий В. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
10. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / Вольмир А. С. – М. : Наука, 1972. – 432 с.

Одержано 25.11.2015

#### **Пожуев А.В., Фасоляк А.В. Нестационарная неосесимметричная деформация цилиндрической оболочки в упругом пространстве под действием подвижных поверхностных нагрузок**

*Рассматривается бесконечная цилиндрическая оболочка, находящаяся в трехмерном упругом инерциальном пространстве. Изучается случай, когда к внутренней поверхности оболочки прикладываются неосесимметрические нормальные нагрузки. Получены выражения для нормальных перемещений и напряжений, а также проиллюстрировано графически их распределение по угловой координате для различных моментов времени.*

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, упругое пространство, динамическая нагрузка, неосесимметричная задача, оболочка типа Тимошенко.

#### **Pozhuev A., Fasoliak A. Non-stationary not axisymmetrical deformation of a cylindrical shell in an elastic space under the action of moving surface loads**

*Infinite cylindrical shell, embded in three-dimensional inertial elastic space is considered. Case, when internal surface of the shell is subjected to non axi-symmetrical balanced impulsive normal loads is studied. Expressions for normal displacements and stresses are received and this distribution on angle axis for different values of time is illustrated graphically.*

**Key words:** cylindrical shell, elastic space, dynamic loads, non axi-symmetrical problem, Timoshenko's shell.