

УДК 534.111:517.926

Канд. техн. наук Д. І. Анпілогов

Запорізький національний технічний університет, м. Запоріжжя

ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ ПЛОСКИХ ЗГИНАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

З використанням процесу ортогоналізації Грамма-Шмідта запропоновано спосіб формування ортогональних функцій прогину при заданих граничних умовах. Методом Релея-Рітца знайдено власні частоти плоских згинальних коливань консольного стержня. Отримані результати підтверджуються збігом частоти нижчої моди з відомими значенням.

Ключові слова: консольний стержень, узагальнені координати, метод Релея-Рітца, частотне рівняння, ортогоналізація.

Вступ

У сучасних технологіях механічної обробки є актуальним врахування коливань оброблювального інструменту (наприклад, різців). Прецизійний динамічний моніторинг часом виявляє відмінність вібрацій інструменту від моноmodalних коливань [1], тому природно припустити одночасне співіснування декількох згинальних мод. Метою цієї роботи є отримання спектру власних частот згинальних коливань консольного стержня, який моделює оброблювальний інструмент.

Матеріали і методика досліджень

У роботі методом Релея-Рітца з використанням наближень, прийнятих в опорі матеріалів, розв'язується задача про плоскі власні коливання консольного стержня з двома ступенями свободи.

Теорія і аналіз отриманих результатів

Нехай однорідний призматичний стержень масою m і довжиною ℓ закріплено консольно (рис. 1).

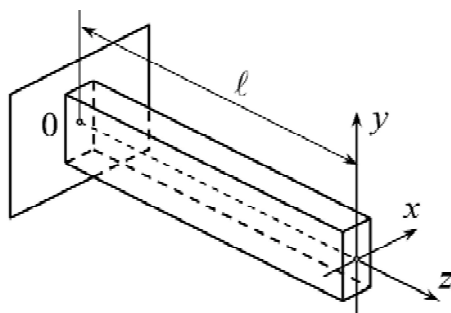


Рис. 1. Консольний стержень

Модуль Юнга матеріалу позначимо через E . Обмежимо розглядом згинальних власних коливань. Спектр власних частот знайдемо методом Релея-Рітца. Проблема полягає в наступному. Застосовувати цей метод можна лише після того, як зроблено певні при-

пущення щодо форм прогину поздовжньої осі стержня. Наразі ці форми є невідомими.

Нехай $f(z)$ – функція прогину. Будемо вважати, що точка $z = 0$ стержня є жорстко затисненою. Тоді кінематичні граничні умови мають вигляд [2, 3]: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. Будемо вважати також, що точка $z = \ell$ є вільною. Тоді динамічні граничні умови [2, 3]: $f''(\ell) = 0$, $f'''(\ell) = 0$.

Знайдемо функції прогину серед багаточленів n -го степеня. Очевидно, для виконання кінематичних граничних умов на затисненому кінці стержня достатньо, щоб цей багаточлен не містив нульового та першого ступенів аргументу. Крім того, він має бути багаточленом не менш ніж четвертого ступеню. В іншому разі (тобто при $n = 3$) умову $f'''(\ell) = 0$ виконати неможливо. Отже, шукаємо функцію прогину у вигляді

$$F(z) = \frac{F_2}{\ell^2} \cdot z^2 + \frac{F_3}{\ell^3} \cdot z^3 + \sum_{k=4}^n \frac{F_k}{\ell^k} \cdot z^k, \quad F_n \neq 0.$$

Динамічні граничні умови на вільному кінці стержня призводять до системи:

$$\begin{cases} 2F_2 + 6F_3 + \sum_{k=4}^n k(k-1)F_k = 0; \\ 6F_3 + \sum_{k=4}^n k(k-1)(k-2)F_k = 0. \end{cases}$$

Звідси можна знайти лише дві невідомі, наприклад, F_2 і F_3 . Інші коефіцієнти F_4, F_5, \dots, F_n можуть бути заданими довільно і незалежно один від одного. Наприклад, при $n = 4$ приймемо $F_4 = 1$. Тоді $F_3 = -4$, $F_2 = 6$. При цьому виникає багаточлен

$$\tilde{f}_1(z) = 6\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 - 4\left(\frac{z}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{z}{\ell}\right)^4,$$

який задовольняє усі граничні умови. Наприклад, при $n = 5$ приймемо $F_5 = 1$, $F_4 = 0$. Тоді $F_3 = -10$, $F_2 = 20$. При цьому виникає багаточлен

$$\tilde{f}_2(z) = 20\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 - 10\left(\frac{z}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{z}{\ell}\right)^5,$$

який також задовольняє усі граничні умови.

Певні зручності виникнуть, якщо ці функції виявляться ортогональними з одиничною вагою на інтервалі $z \in [0; \ell]$. Здійснюючи процес ортогоналізації Грама-Шмідта і обмежуючись двома модами, приймемо

$$f_1 = \tilde{f}_1, \quad f_2 = \tilde{f}_2 - \alpha f_1. \quad \text{Маємо: } \int_0^\ell f_1 f_2 dz = 0, \quad \text{звідки}$$

$$\alpha = \frac{\int_0^\ell f_1 \tilde{f}_2 dz}{\int_0^\ell f_1^2 dz} = \frac{661}{182}.$$

Отже, функції прогину набувають вигляду

$$f_1(z) = 6\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 - 4\left(\frac{z}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{z}{\ell}\right)^4,$$

$$f_2 = \tilde{f}_2 - \alpha f_1 = -\frac{163}{91}\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + \frac{412}{91}\left(\frac{z}{\ell}\right)^3 - \frac{661}{182}\left(\frac{z}{\ell}\right)^4 + \left(\frac{z}{\ell}\right)^5.$$

Доцільність введення функції f_2 (замість \tilde{f}_2) ілюструється на рис. 2. З точністю до прийнятних коефіцієнтів масштабу суцільною монотонною кривою показано графік функції f_1 , а штриховою кривою – графік функції \tilde{f}_2 (до ортогоналізації). Якісно ці графіки є однаковими і відповідають статичному прогину при консольному закріпленні. Графік функції f_2 (після ортогоналізації) виявляється немонотонним, і тому дозволяє врахувати протифазність коливань різних ділянок стержня. Тому саме функцію f_2 (а не \tilde{f}_2) слід розглядати як більш вдале наближення профілю прогину для вищого типу коливань.

Обчислимо кінетичну енергію стержня. Знехтуємо зміщенням поперечних перерізів уздовж осей Oy , Oz . Тоді рівняння руху центру тяжіння поперечного перерізу, розташованого в точці з координатою z , слід прийняти у вигляді

$$x(z, t) = f_1(z) \cdot q_1(t) + f_2(z) \cdot q_2(t), \quad y(z, t) \equiv 0. \quad (1)$$

Тут $q_1(t)$, $q_2(t)$ – дві узагальнені координати (їх кількість відповідає прийнятій кількості ступенів свободи коливальної системи). Вигляд рівнянь (1) відповідає випадку,

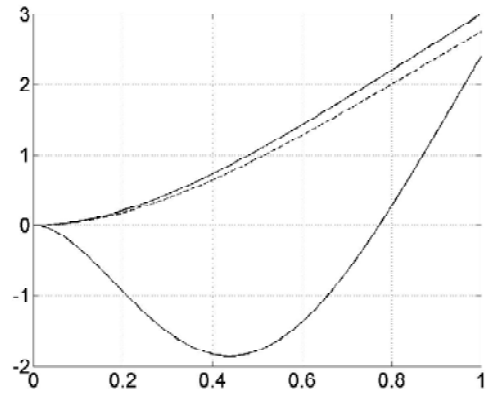


Рис. 2. До ортогоналізації функцій прогину

коли жорсткість стержня при згині в площині xOz є малою, а в площині yOz – великою, тобто нейтральна лінія стержня при згині залишається плоскою кривою в площині xOz . Зауважимо також, що значення функції f_1 , f_2 є безрозмірними. Відповідні співмножники, що зберігають розмірність довжини, а також визначають відносну частку коливань різних типів, можна вважати віднесеними до функцій q_1 , q_2 .

Площинами $z = \text{const}$ виділимо диференціально малий елемент довжини dz стержня, розташований у точці з координатою z . Його маса $dm = \frac{m}{\ell} dz$. Швидкість руху в момент часу t дорівнює $v = \dot{x} = f_1 \cdot \dot{q}_1 + f_2 \cdot \dot{q}_2$. Елементарна кінетична енергія

$$dT = \frac{(dm)v^2}{2} = \frac{m(\dot{x})^2}{2\ell} dz.$$

Після інтегрування:

$$T = \frac{m}{2\ell} \int_0^\ell (\dot{x})^2 dz = \frac{m}{2\ell} \int_0^\ell (f_1 \cdot \dot{q}_1 + f_2 \cdot \dot{q}_2)^2 dz.$$

Інтеграл від добутку функцій f_1 , f_2 дорівнює нулю з причини їх ортогональності, і отже:

Тут через a_1 , a_2 позначено інерційні константи:

$$a_1 = \frac{m}{\ell} \int_0^\ell f_1^2(z) dz, \quad a_2 = \frac{m}{\ell} \int_0^\ell f_2^2(z) dz.$$

Обчислимо потенціальну енергію пружної деформації стержня, вважаючи наявними лише нормальні напруження. Нехай згин стержня зумовлений дією моменту M_y , який обертає поперечний переріз навколо осі Oy (рис. 3). Нейтральна лінія стержня при цьому виявляється плоскою кривою в площині xOz .

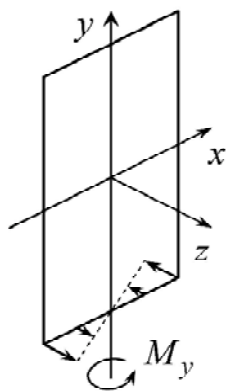


Рис. 3. Розподіл нормальних напружень у поперечному перерізі

У поперечному перерізі виникає нормальне напруження σ , лінійно розподілене за абсцисою x за законом [4]:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot \xi.$$

Тут I_y – осовий момент інерції перерізу відносно осі Oy . Координата ξ також відкладається на осі Ox , але вказує на конкретну точку перерізу (в той час як координата $x(z, t)$ вказує на положення центру тяжіння перерізу, розташованого в точці z , у момент часу t). Виражаючи відношення $\frac{M_y}{I_y}$ з відомого [4] рівняння чистого згину балки $x'' = \frac{M_y}{EI_y}$ (тут другу похідну взято за поздовжньою координатою z), отримуємо:

$$\sigma = Ex'' \cdot \xi = E(f_1'' \cdot q_1 + f_2'' \cdot q_2) \cdot \xi. \quad (2)$$

Як бачимо, напружений стан матеріалу стержня є одноосним неоднорідним. Тоді локальне значення об'ємної густини пружної енергії дорівнює $w = \frac{\sigma^2}{2E}$, і повне значення енергії

$$\Pi = \iiint w dV = \frac{1}{2E} \iiint \sigma^2 dz dS.$$

З використанням (2) одержуємо:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + (c_{12} + c_{21})q_1q_2 + c_{22}q_2^2).$$

Тут позначено

$$c_{11} = EI_y \int_0^\ell (f_1'')^2 dz, \quad c_{22} = EI_y \int_0^\ell (f_2'')^2 dz,$$

$$c_{12} = c_{21} = EI_y \int_0^\ell f_1'' f_2'' dz.$$

Коефіцієнти c_{ik} утворюють симетричну матрицю квазіпружних констант.

Складемо систему рівнянь Лагранжа для консервативної механічної системи [5]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2.$$

З використанням отриманих вище виразів для енергій отримуємо:

$$\begin{cases} a_1 \ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0; \\ a_2 \ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Загальний розв'язок шукаємо у вигляді $q_j(t) = A_j \sin(\omega t + \varphi)$, $j = 1, 2$. При цій підстановці (3) перетворюється на систему:

$$\begin{pmatrix} c_{11} - a_1\omega^2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - a_2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для існування нетривіальних розв'язків матриця в (4) має бути виродженою. Звідси частотне рівняння:

$$(a_1\omega^2 - c_{11})(a_2\omega^2 - c_{22}) - c_{12}c_{21} = 0.$$

Його розв'язки

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{a_1c_{22} + a_2c_{11} \pm \sqrt{(a_1c_{22} - a_2c_{11})^2 + 4a_1a_2c_{12}c_{21}}}{2a_1a_2}. \quad (5)$$

Розрахунки інерційних і квазіпружних констант виконано в онлайн-середовищі WolframAlpha [6] при заміні змінних $x = \frac{z}{\ell}$. Наприклад, при обчисленні a_1 , отримуємо інтеграл $a_1 = m \int_0^1 (6x^2 - 4x^3 + x^4)^2 dx$. Достатньо до командного рядка ввести команду з таким синтаксисом: `int_0^1(6x^2-4x^3+x^4)^2dx`. Результати, отримані в цьому середовищі:

$$a_1 = \frac{104}{45} m, \quad a_2 = \frac{326}{105105} m, \quad c_{11} = \frac{144}{5} \cdot \frac{EI_y}{\ell^3},$$

$$c_{22} = \frac{66236}{41405} \cdot \frac{EI_y}{\ell^3}, \quad c_{12} = -\frac{272}{455} \cdot \frac{EI_y}{\ell^3}.$$

При використанні цих значень з (5) знаходимо:

$$\omega_1 = 3,516 \sqrt{\frac{EI_y}{m\ell^3}}, \quad \omega_2 = 22,713 \sqrt{\frac{EI_y}{m\ell^3}}.$$

У [2, с. 31], [3, с. 307] для основної частоти вільних коливань консольного стержня пропонується вираз

$\frac{3,51}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$. Від отриманого нами він відрізняється тим,

що в цих виданнях символом m позначено не масу стержня, а її інтенсивність (масу в розрахунку на одиницю довжини). Числові коефіцієнти для найнижчої моди збігаються з високою точністю (порядку 0,2 %). Це свідчить про вдалий вибір функцій прогину.

Бачимо далі, що частота другої згинальної моди значно відрізняється від основної частоти, тому здійснити спектральний аналіз сигналу вібросенсору [7] з діагностуванням другої згинальної моди труднощів не складає.

Висновки

У роботі методом Релея-Рітца отримано власні частоти згинальних коливань консольного стержня, що моделює оброблювальний інструмент при металообробці. Для вищих типів згинальних коливань консольного стержня запропоновано спосіб знаходження функцій прогину, які задовільняють кінематичні і динамічні граничні умови. Використання процесу ортогоналізації Грама-Шмідта дозволяє отримати фізично реалістичні функції прогину, які враховують протифазність коливань окремих ділянок стержня. Вдалість підбору функцій

прогину обґрунтована збігом отриманого значення основної частоти з відомими результатами.

Список літератури

1. Altintas Y. Manufacturing automation : metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design / Yusuf Altintas. – Cambridge : Cambridge University Press, 2012. – 382 p.
2. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Пановко Я.Г. – М. : Наука, 1971. – 240 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. Т. 3 / [Биргер И. А., Пановко Я. Г., Болотин В. В. и др.] ; под ред. И. А. Биргера. – М. : Машиностроение, 1968. – 569 с.
4. Сопротивление материалов / [Писаренко Г. С., Агапов В. А., Квитка А. Л. и др.]. – [4-е изд.]. – К. : Вища шк., 1979. – 696 с.
5. Савельев И. В. Основы теоретической физики / Савельев И. В. – М. : Наука, 1991. – 496 с.
6. WolframAlpha: computational knowledge engine [Эл. ресурс]. – Режим доступа : www.wolframalpha.com.
7. Пат. 94382 Україна, МПК G01H 11/00, G01M 7/02. Стенд для діагностики коливань тонкостінної деталі типу лопаток моноколеса газотурбінного двигуна (ГТД) при кінцевому фрезеруванні / А. І. Гермашев, В. О. Логомінов, Д. І. Анпілогов. – № u201405982 ; заявл. 02.06.2014 ; опубл. 10.11.2014, Бюл. № 21. – 2 с.

Одержано 20.04.2015

Анпілогов Д.И. Определение частот плоских изгибных колебаний консольного стержня

С использованием процесса ортогонализации Грама-Шмидта предложен способ формирования ортогональных функций прогиба при заданных граничных условиях. Методом Рэлея-Ритца найдены собственные частоты плоских изгибных колебаний консольного стержня. Полученные результаты подтверждаются совпадением частоты нижней моды с известным значением.

Ключевые слова: консольный стержень, обобщённые координаты, метод Рэлея-Ритца, частотное уравнение, ортогонализация.

Anpilogov D. Determining the frequency of the planar bending vibrations of a cantilever beam

Using the process of Gram-Schmidt orthogonalization a method of generating of orthogonal deflection functions with given boundary conditions is provided. The own frequencies of plane bending vibrations of a cantilever beam are found by Rayleigh-Ritz method. The obtained results confirmed by the coincidence of the frequency of the lowest mode with known value.

Key words: cantilever beam, generalized coordinates, Rayleigh-Ritz method, frequency equation, orthogonalization.