

S. A. Bepalko, A. V. Yovchenko, S. P. Polyakov, E. Y. Gubar, O. S. Shkaruba  
**LIQUID UNSTATIONARY FLOW DYNAMICS IN HYDRODYNAMIC THERMAL  
 GENERATOR ACTIVE ZONE**

Подано результати теоретичних досліджень динаміки нестационарної течії рідини в активній зоні гідродинамічного теплогенератора роторного типу. Виконано чисельний розрахунок основних параметрів нестационарного потоку та проведено аналіз отриманих результатів.

**Ключові слова:** дисипативне нагрівання, гідродинамічний теплогенератор, активна зона, частота пульсацій, нестационарний потік.

Theoretical research results of the liquid unstationary flow dynamics in rotor hydrodynamic thermal generator active zone were presented. The numerical calculation of unstationary flow basic parameters is applied as well as results analysis.

**Key words:** dissipation heating, the hydrodynamic thermal generator, active zone, pulsations frequency, unstationary flow.

УДК 517.521.2:539.37

И. И. Сабо, д-р техн. наук В. А. Толок

Национальный технический университет, г. Запорожье

**СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ШТАМПЕ МЕТОДОМ  
 НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ**

Рассматриваются необходимые и достаточные условия сходимости решения задачи о штампе методом начальных функций. Рассмотрена сходимость каждой функции в отдельности и на основании полученных результатов сделан вывод относительно условий и характера сходимости решения в целом.

**Ключевые слова:** необходимые условия сходимости, достаточные условия сходимости, штамп, метод начальных функций, сходимость решения.

**Введение**

Рассмотрим задачу о штампе (рис. 1).

В прямоугольную плиту по граничной плоскости  $y = h$  вдавливается плоский штамп. Будем считать, что нормальные перемещения плиты под штампом являются известной функцией от  $x$ , а на другой границе

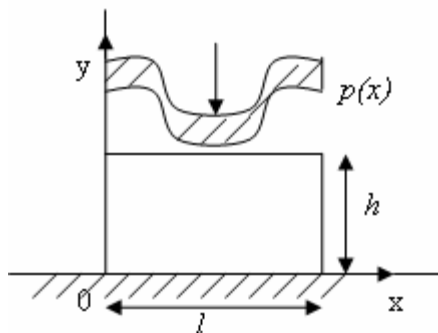


Рис. 1. Вдавливание штампа в прямоугольную плиту

плиты, при  $y = 0$ , равны нулю. Кроме того, будем считать, что на краях плиты  $y = 0$  и  $y = h$  отсутствуют касательные напряжения  $X$ . Данная задача имеет следующие граничные условия [1]:

$$\begin{aligned} v(0, y) = v(l, y) = 0, \sigma_y(0, y) = \\ = \sigma_y(l, y) = 0, \sigma_x(0, y) = \sigma_x(l, y) = 0, \\ v(x, h) = V_h = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), v(x, 0) = V_0 = \\ = 0, \tau_{xy}(x, h) = X_h = 0, \tau_{xy}(x, 0) = X_0 = 0. \end{aligned}$$

Решение данной задачи методом начальных функций было приведено В. З. Власовым в виде бесконечных рядов. Цель данной статьи – определить условия и характер сходимости решения.

Перемещения и напряжения плиты определяются в следующем виде [1]:

$$U = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n \cos(\beta_n \xi)}{2\Delta_n} (((1-2\nu)sh(\beta_n) - \beta_n ch(\beta_n))ch(\beta_n \eta) + \beta_n sh(\beta_n) \eta sh(\beta_n \eta));$$

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n \sin(\beta_n \xi)}{2\Delta_n} ((2(1-\nu)sh(\beta_n) + \beta_n ch(\beta_n))sh(\beta_n \eta) - \beta_n sh(\beta_n) \eta ch(\beta_n \eta));$$

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n \beta_n \sin(\beta_n \xi)}{h\Delta_n} ((sh(\beta_n) + \beta_n ch(\beta_n))ch(\beta_n \eta) - \beta_n sh(\beta_n) \eta sh(\beta_n \eta));$$

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n \beta_n^2 \cos(\beta_n \xi)}{h\Delta_n} (ch(\beta_n)sh(\beta_n \eta) - sh(\beta_n) \eta sh(\beta_n \eta));$$

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n \beta_n \sin(\beta_n \xi)}{h\Delta_n} ((sh(\beta_n) - \beta_n ch(\beta_n))ch(\beta_n \eta) + \beta_n sh(\beta_n) \eta sh(\beta_n \eta)),$$

где  $\eta = \frac{y}{h}$ ,  $\xi = \frac{x}{h}$ ,  $\Delta_n = (1-\nu)sh^2(\beta_n)$ ,  $\beta_n = \frac{n\pi h}{l}$ .

Функция  $\delta_n$  зависит от выбора граничных условий, то есть от выбора функции  $V(x)$  при  $y = h$  [1]:

$$V(x, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(\alpha_n x),$$

где  $\delta_n = \frac{2}{l} \int_0^l V(x, h) \sin(\alpha_n x) dx$ ,  $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$ .

### Материалы и методика исследований

Проверим выполнение необходимого признака сходимости ряда для функции  $U$ :

$$U = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n \cos(\beta_n \xi)}{2(1-\nu)sh^2(\beta_n)} (((1-2\nu)sh(\beta_n) - \beta_n ch(\beta_n))ch(\beta_n \eta) + \beta_n sh(\beta_n) \eta sh(\beta_n \eta)),$$

Для сходимости ряда необходимо выполнение следующего равенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0. \quad (1)$$

Вычислим значение этого предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\delta_n \cos(\beta_n \xi)}{2(1-\nu)sh^2(\beta_n)} (((1-2\nu)sh(\beta_n) - \beta_n ch(\beta_n))ch(\beta_n \eta) + \beta_n sh(\beta_n) \eta sh(\beta_n \eta)). \quad (2)$$

Так как  $-\frac{\cos(\beta_n \xi)}{2(1-\nu)}$  является ограниченной функцией принимающей определенное количество различных значений и, следовательно, не влияет на результат сходимости, то (2) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \lim_{n \rightarrow \infty} ((1-2\nu) \frac{ch(\beta_n \eta)}{sh(\beta_n)} - \\ &- \beta_n cth(\beta_n) \frac{ch(\beta_n \eta)}{sh(\beta_n)} + \beta_n \eta \frac{sh(\beta_n \eta)}{sh(\beta_n)}); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \lim_{n \rightarrow \infty} ((1-2\nu)e^{\beta_n(\eta-1)} - \\ &- (1-\eta)\beta_n e^{\beta_n(\eta-1)}). \end{aligned} \quad (3)$$

Тригонометрические функции, такие как  $\cos$  и  $\sin$ , могут сделать ряд знакопеременным, что лишь ослабит условия сходимости.

Так как  $\eta \leq 1$  перепишем (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \lim_{n \rightarrow \infty} ((1-2\nu) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\beta_n(1-\eta)}} - \\ &- (1-\eta) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{e^{\beta_n(1-\eta)}}). \end{aligned} \quad (4)$$

Вычислим значение этого предела при  $\eta \neq 1$ , то есть не на границе плиты. Применим к последнему пределу в выражении (4) правило Лопитала

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = -2\nu \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\beta_n(1-\eta)}}. \quad (5)$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\beta_n(1-\eta)}} = 0$  при  $\eta < 1$ , то для выполнения необходимого условия сходимости (1) необходимо чтобы при  $\eta < 1$  предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  или

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \text{const}$  или, если ряд  $\delta_n$  расходится, чтобы скорость расхождения ряда  $\delta_n$  была ниже скорости

сходимости ряда  $\frac{1}{e^{\beta_n(1-\eta)}}$ , то есть чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\beta_n(1-\eta)}} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что решение для функции  $U$  вблизи основания плиты (при  $\eta \approx 0$ ) сходится гораздо лучше, чем вблизи границы плиты (при  $\eta \approx 1$ ).

Вычислим значение предела (4) при  $\eta = 1$  (то есть на границе плиты)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = (1-2\nu) \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n. \quad (7)$$

Отсюда следует, что для выполнения необходимого условия сходимости (1) на границе плиты необходимо выполнение следующего неравенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

Проверим выполнение достаточного признака Даламбера для функции  $U$ . Для сходимости ряда достаточно выполнения такого неравенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1. \quad (8)$$

Вычислим значение этого предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} U_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} U_n}. \quad (9)$$

Вычислим значение предела (9) при  $\eta \neq 1$ . Учитывая (5), можем переписать выражение (9) в следующем виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{e^{\frac{\pi h(1-\eta)}{l}}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}. \quad (10)$$

Подставим выражение (10) в неравенство (8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} < e^{\frac{\pi h(1-\eta)}{l}}. \quad (11)$$

Таким образом, для сходимости решения при  $\eta \neq 1$  достаточно выполнения неравенства (11). Если для ряда  $\delta_n$  выполняется достаточный признак Даламбера, то тем более выполняется неравенство (11), так как значение  $e^{\frac{\pi h(1-\eta)}{l}} > 1$  при  $\eta < 1$ . Из неравенства (11) также следует, что чем меньше значение  $\eta$  – тем лучше сходится решение для функции  $U$ .

Вычислим значение предела (9) при  $\eta = 1$ . Учитывая (7), можем переписать выражение (9) в следующем виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n}. \quad (12)$$

Подставим выражение (12) в неравенство (8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} < 1. \quad (13)$$

Таким образом, для сходимости решения при  $\eta = 1$  достаточно выполнения неравенства (13).

Рассмотрим сходимость решения при знакопеременном ряде  $\delta_n$ . Так как ряд  $\delta_n$  является знакопеременным рядом, то мы используем достаточный признак Лейбница

$$U_n > U_{n+1}. \quad (14)$$

Произвольное изменение конечного числа членов ряда не может нарушить факта сходимости или расхождения. Следовательно, если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  сходится

начиная с некоторого номера  $k$ , то есть сходится ряд

$\sum_{n=k}^{\infty} U_n$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  также сходится. Предположим

что  $k$  очень велико, тогда при очень больших значениях  $n$  мы можем воспользоваться равенством (5) в случае  $\eta \neq 1$  и записать следующее выражение:

$$U_n \approx -2v\delta_n \frac{1}{e^{\beta_n(1-\eta)}}. \quad (15)$$

Подставим (15) в (14)

$$\delta_n > \delta_{n+1} \frac{1}{e^{\frac{\pi h}{l}(1-\eta)}}. \quad (16)$$

Из неравенства (16) также как и из неравенства (11) следует, что чем меньше значение  $\eta$  – тем лучше сходится решение для функции  $U$ . Если для ряда  $\delta_n$  выполняется достаточный признак Лейбница, то тем более выполняется неравенство (16), так как значение  $e^{\frac{\pi h}{l}(1-\eta)} > 1$  при  $\eta < 1$ .

В случае  $\eta = 1$  при очень больших значениях  $n$  мы можем воспользоваться равенством (7) и записать следующее выражение:

$$U_n \approx (1-2v)\delta_n. \quad (17)$$

Подставим (17) в (14)

$$\delta_n > \delta_{n+1}. \quad (18)$$

Таким образом, для сходимости решения при  $\eta = 1$  для знакопеременного ряда достаточно выполнения неравенства (18).

Далее для всех остальных функций при  $\eta \neq 1$  мы получим те же необходимые и достаточные условия, что и для функции  $U$  – это условия (6), (11) и (16).

Для  $V$  при  $\eta = 1$  получим те же необходимые и достаточные условия, что и для  $U$ .

Для  $Y$  и  $\sigma_x$  при  $\eta=1$  получим следующие условия: необходимый признак –  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_n \beta_n) = 0$ ; доста-

точный признак –  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_{n+1} \beta_{n+1}}{\delta_n \beta_n} < 1$ ; достаточный

признак знакопеременного ряда –  $\delta_n \beta_n > \delta_{n+1} \beta_{n+1}$ .

Для  $X$  при  $|\delta_n|$  получим следующие условия: необходимый признак – выполняется всегда; достаточ-

ный признак –  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_{n+1} \beta_{n+1}^2}{\delta_n \beta_n^2} < e^{\frac{2\pi h}{l}}$ ; достаточный

признак знакопеременного ряда –  $(e^{2\beta_{n+1}} - 1)\delta_n \beta_n^2 > (e^{2\beta_n} - 1)\delta_{n+1} \beta_{n+1}^2$ .

Рассмотрим пример, где выбраны следующие зна-

чения постоянных:  $\delta_n = -\frac{(-1)^{n+1} + 1}{\pi n}$ ,  $h = 4$  м,

$l = 8$  м,  $v = \frac{1}{3}$  [2].

Возьмем точку на границе, точку вблизи границы и точку вблизи основания для функций  $U$  (рис. 2) и  $Y$  (рис. 3) [3].

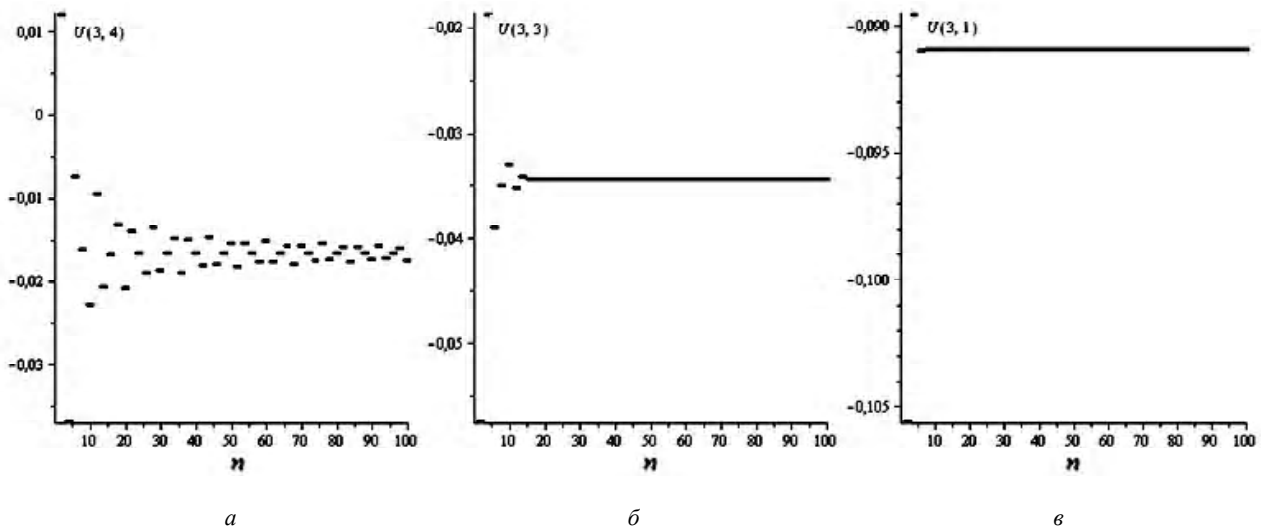


Рис. 2. Зависимость значения функции  $U$  от количества членов ряда  $n$  :

$a$  – в точке (3, 4);  $b$  – в точке (3,3);  $c$  – в точке (3,1)

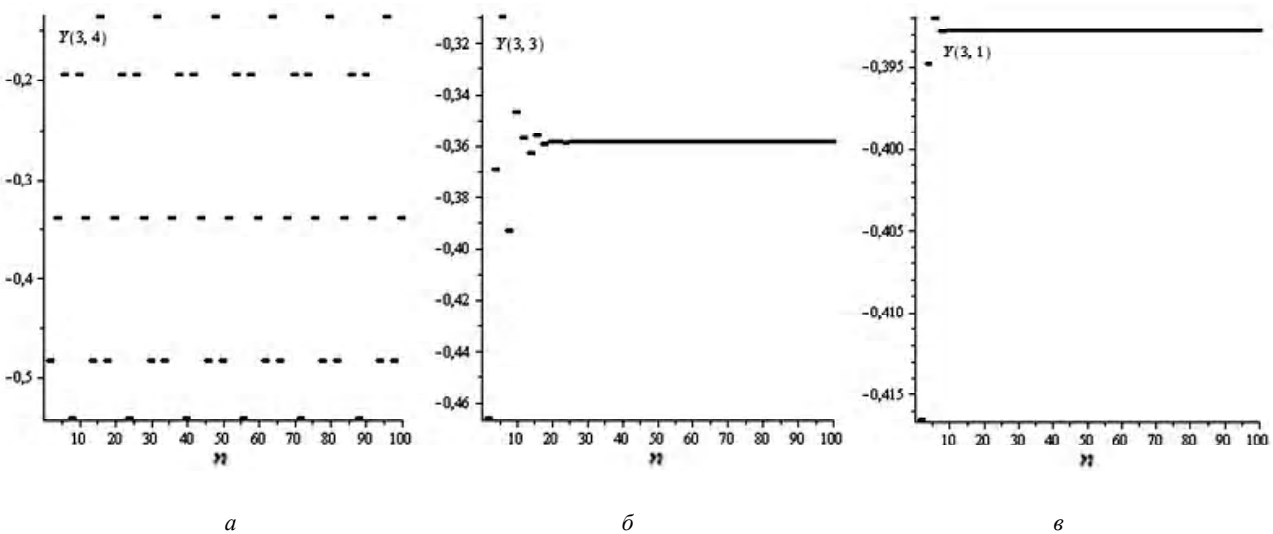


Рис. 3. Зависимость значения функции  $Y$  от количества членов ряда  $n$  :

$a$  – в точке (3,4);  $b$  – в точке (3,3);  $c$  – в точке (3,1)

Этот пример наглядно показывает, что вблизи основания плиты решения сходится лучше.

#### Теория и анализ полученных результатов

В итоге, не на границе плиты (при  $\eta \neq 1$ ) для сходимости решения в целом необходимо выполнение равенства (6) и, для знакопостоянного ряда  $\delta_n$  – неравенства (11), для знакопеременного ряда  $\delta_n$ , где ряд  $\delta_n$  предварительно заменяется рядом из модулей  $|\delta_n|$ , – неравенства (11) для абсолютной сходимости или неравенства (16) для условной сходимости.

В целом, можно сделать вывод, что чем ближе к основанию плиты (чем меньше значение  $\eta$ ) – тем лучше сходится решение для всех функций. На границе плиты (при  $\eta = 1$ ) следует рассматривать сходимость каждой функции в отдельности.

#### Выводы

В данной статье получены необходимые и достаточные условия сходимости решения задачи о штампе методом начальных функций. Также было установлено, что решение вблизи основания плиты сходится гораздо лучше, чем на границе плиты. Это наглядно показано на примере в виде графиков зависимости значения функции в точке от количества членов ряда.

#### Перечень ссылок

1. Власов В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Физматгиз, 1960. – 491 с.
2. Овский А. Г. Моделирование схемы решения трехмерной задачи теории упругости в системе Maple / Овский А. Г., Толок В. А. // Гидроакустичний журнал. – 2006. – № 3. – С. 88–97.
3. Аладьев В. З. Системы компьютерной алгебры : Maple : Искусство программирования / Аладьев В. З. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2006. – 792 с.

Одержано 13.04.2010

I. I. Sabo, V. O. Tolok

## STAMP TASK SOLUTION CONVERGENCE USING THE INITIAL FUNCTIONS METHOD

*Розглядаються необхідні й достатні умови збіжності розв'язку задачі про штамп методом початкових функцій. Розглянуто збіжність кожної функції окремо й на підставі отриманих результатів зроблений висновок щодо умов і характеру збіжності розв'язку в цілому.*

**Ключові слова:** необхідні умови збіжності, достатні умови збіжності, штамп, метод початкових функцій, збіжність розв'язку.

*The necessary and sufficient convergence conditions of stamp problem initial functions solution are considered. The convergence of each function was researched separately and on the results basis the conclusions concerning conditions and nature of solutions convergence in general, are drawn.*

**Key words:** convergence necessary conditions, convergence sufficient conditions, stamp, initial functions solution, solution convergence.

УДК 539.3

Д-р техн. наук А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина

Государственная инженерная академия, г. Запорожье

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ С ПОМОЩЬЮ УТОЧНЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*При помощи метода асимптотико-группового анализа получены из трехмерных динамических уравнений теории упругости одномерные динамические уравнения продольной деформации стержня, более точные, чем известные. В частности скорость распространения фронта продольной волны в соответствии с уточненными уравнениями совпадает со скоростью трехмерной продольной волны, в то время, как в известных уравнениях она значительно меньше. Проанализирован переход от зоны вблизи трехмерного волнового фронта к квазифронту одномерной волны.*

© А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина, 2010