

УДК 531. 36

Д-р физ.-мат. наук С. А. Агафонов¹, канд. физ.-мат. наук И. А. Костюшко²

¹ Государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва;

² Национальный университет, г. Запорожье

ДИНАМИКА РОТОРА ПРИ ДЕЙСТВИИ УПРУГОЙ СИЛЫ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

В работе исследуется динамика установившегося движения уравновешенного ротора, вращающегося с помощью двигателя неограниченной мощности [1]; при этом упругая сила, действующая на ротор, имеет гистерезисную характеристику [2]. Уравнения движения описываются квазипериодической линейной системой дифференциальных уравнений, для которой применяется процедура редукции с заданной точностью к автономной с последующим анализом последней [3].

Ключевые слова: ротор, упругая сила, уравнения движения, диспация, механическая система.

Постановка задачи и уравнения движения

Уравнения движения ротора с учетом работы двигателя неограниченной мощности и внешней силы сопротивления $\vec{F} = -d\vec{u}$, пропорциональной скорости \vec{u} центра масс C (рис. 1), запишем в виде уравнений, отнесенных к подвижной системе координат OXY

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_x + \Omega_0 y, & \dot{y} &= u_y - \Omega_0 x, \\ \dot{u}_x &= -m^{-1} F_x - \frac{d}{m} u_x + \Omega_0 u_y, \\ \dot{u}_y &= -m^{-1} F_y - \frac{d}{m} u_y + \Omega_0 u_x, \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y, u_x, u_y – соответственно координаты и проекции скорости центра масс C ротора; Ω_0 – угловая скорость вращения ротора; F_x, F_y – проекции сил, действующих на ротор.

Определим упругие силы F_x, F_y , используя уравнения одной из гистерезисных петель в параметрической форме [2]. В соответствии с рис. 2

$$x(t) = a \cos^3 t + b_x \sin t, \quad y(t) = b_y \sin t,$$

где $a = 0,2, b_x = 0,6, b_y = 0,8$.

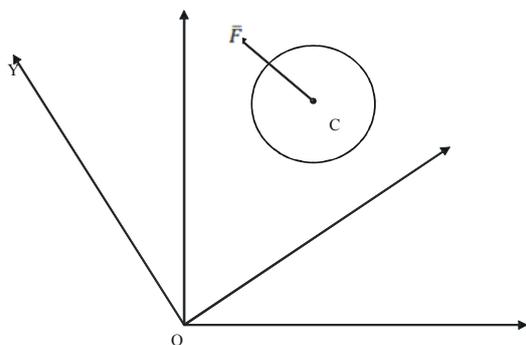


Рис. 1.

Проекции сил, действующих на ротор

$$F_x = -k(a \cos^3 t + b_x \sin t)x, \quad F_y = -k b_y \sin t y,$$

где k – постоянный параметр.

Исключая переменные u_x, u_y , систему (1) приводим к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x} + dm^{-1}\dot{x} - \Omega_0^2 x - 2\Omega_0 \dot{y} - dm^{-1}\Omega_0 y + \\ + m^{-1}k(a \cos^3 t + b_x \sin t)x &= 0, \\ \ddot{y} + dm^{-1}\dot{y} - \Omega_0^2 y + 2\Omega_0 \dot{x} + \\ + dm^{-1}\Omega_0 x + m^{-1}k b_y \sin t y &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

2 Преобразование уравнений движения

В системе (2) сделаем замену переменных

$$x = \xi_1 \cos(\Omega_0 t) + \xi_2 \sin(\Omega_0 t),$$

$$y = -\xi_1 \sin(\Omega_0 t) + \xi_2 \cos(\Omega_0 t). \quad (3)$$

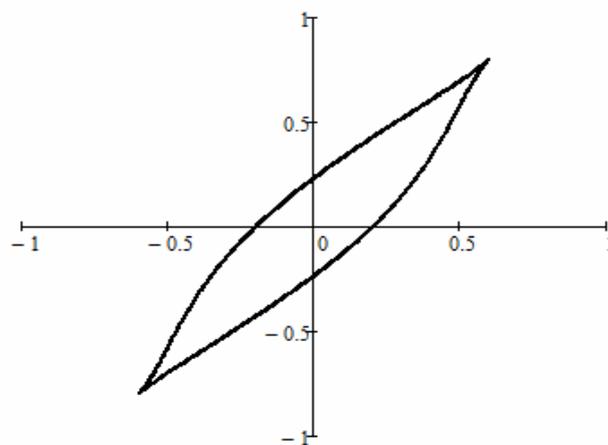


Рис. 2.

В результате система (2) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + dm^{-1}\dot{\xi}_1 + m^{-1}k \left[\begin{array}{l} (a \cos^3 t + b_x \sin t) \cos^2(\Omega_0 t) + \\ + b_y \sin t \sin^2(\Omega_0 t) \end{array} \right] \xi_1 + \\ + m^{-1}k \left[\begin{array}{l} \sin(\Omega_0 t) \cos(\Omega_0 t) (a \cos^3 t + \\ + b_x \sin t - b_y \sin t) \end{array} \right] \xi_2 = 0; \\ \ddot{\xi}_2 + dm^{-1}\dot{\xi}_2 + m^{-1}k \left[\begin{array}{l} \sin(\Omega_0 t) \cos(\Omega_0 t) (a \cos^3 t + \\ + b_x \sin t - b_y \sin t) \end{array} \right] \xi_1 + \\ + m^{-1}k \left[\begin{array}{l} \sin^2(\Omega_0 t) (a \cos^3 t + b_x \sin t) + \\ + b_y \sin t \cos^2(\Omega_0 t) \end{array} \right] \xi_2 = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1(t) &= (a \cos^3 t + b_x \sin t) \cos^2(\Omega_0 t) + b_y \sin t \sin^2(\Omega_0 t); \\ \ddot{\varphi}_2(t) &= (a \cos^3 t + b_x \sin t - b_y \sin t) \sin^2(\Omega_0 t); \\ \ddot{\varphi}_3(t) &= (a \cos^3 t + b_x \sin t) \sin^2(\Omega_0 t) + b_y \sin t \cos^2(\Omega_0 t). \end{aligned}$$

Тогда систему (4) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \varepsilon \dot{\xi}_1 + d^{-1}k\varepsilon \ddot{\varphi}_1(t) \xi_1 + \frac{1}{2}d^{-1}k\varepsilon \ddot{\varphi}_2(t) \xi_2 = 0; \\ \ddot{\xi}_2 + \varepsilon \dot{\xi}_2 + d^{-1}k\varepsilon \ddot{\varphi}_2(t) \xi_1 + \frac{1}{2}d^{-1}k\varepsilon \ddot{\varphi}_3(t) \xi_2 = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

где $\varepsilon = dm^{-1}$.

Введя вектор $Y = (\xi_1, \xi_2)^T$ и матрицу

$$\ddot{R}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1(t) & \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_2(t) \\ \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_2(t) & \ddot{\varphi}_3(t) \end{pmatrix}, \text{ система (5) в матричной}$$

форме такова

$$\ddot{Y} + \varepsilon E_2 \dot{Y} + d^{-1}k\varepsilon \ddot{R}(t)Y = 0, \quad (6)$$

где E_2 – единичная матрица второго порядка. Далее

введем векторную переменную $\alpha = (Y, \varepsilon^{-1/2}\dot{Y}) \in R^4$. Система (6) примет вид

$$\dot{\alpha} = \varepsilon^{-1/2}A\alpha, \quad (7)$$

где $A = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ -d^{-1}k\ddot{R}(t) & -\varepsilon^{1/2}E_2 \end{pmatrix}$, O_2 – нулевая матрица второго порядка.

3 Редукция с заданной точностью к автономной системе

Сделаем в системе (7) замену переменных

$$\alpha = (E_4 + \varepsilon^{1/2}X_1(t) + \varepsilon X_2(t) + \varepsilon^{3/2}X_3(t))\beta + O(\varepsilon^2), \quad (8)$$

чтобы преобразовать систему (7) к виду

$$\dot{\beta} = (\varepsilon^{1/2}M_1 + \varepsilon M_2 + \varepsilon^{3/2}M_3)\beta + O(\varepsilon^2). \quad (9)$$

В (8) и (9) матрицы $X_i(t), M_i$ ($i=1, 2, 3$) неизвестны, причем матрицы M_i постоянны. Представив матрицу

$$A = A_0 - \varepsilon^{1/2}A_1, \quad \text{где } A_0 = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ -d^{-1}k\ddot{R}(t) & O_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & E_2 \end{pmatrix}, \text{ после замены (8) система (7) имеет}$$

вид

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= [(A_0 - \dot{X}_1)\varepsilon^{1/2} + \\ &+ (A_0 X_1 - X_1 A_0 - \dot{X}_2 - A_1 + X_1 \dot{X}_1)\varepsilon + \\ &+ (A_0 X_2 - \dot{X}_3 - A_1 X_1 - X_1 A_0 X_1 + X_1 \dot{X}_2 + X_1 A_1 + \\ &+ (X_1^2 - X_2)(A_0 - \dot{X}_1))\varepsilon^{3/2}] \beta + O(\varepsilon^2). \quad (10) \end{aligned}$$

Приравнивая члены при $\varepsilon^{1/2}, \varepsilon, \varepsilon^{3/2}$ в системах (9) и (10), получим

$$\dot{X}_1 = A_0 - M_1,$$

$$\dot{X}_2 = A_0 X_1 - X_1 A_0 - A_1 + X_1 \dot{X}_1 - M_2,$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 &= A_0 X_2 - A_1 X_1 - X_1 A_0 X_1 + X_1 \dot{X}_2 + \\ &+ X_1 A_1 + (X_1^2 - X_2)(A_0 - \dot{X}_1) - M_3. \end{aligned}$$

Постоянные матрицы M_1, M_2, M_3 находятся из условия отсутствия секулярных членов в X_1, X_2, X_3 и имеют вид

$$M_1 = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ O_2 & O_2 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ O_2 & -E_2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ -k^2 m & O_2 \end{pmatrix}_3,$$

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} & \frac{1}{2}m_{12} \\ \frac{1}{2}m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В (11) элементы матрицы m таковы

$$m_{11} = \left\langle \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{4}\dot{\varphi}_2^2 \right\rangle, m_{12} = \langle \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \rangle,$$

$$m_{22} = \left\langle \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{4}\dot{\varphi}_2^2 \right\rangle,$$

где обозначение $\langle f \rangle$ означает операцию осреднения:

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Матрица m является положительно определенной:

$$m_{11} > 0, m_{11}m_{22} - \frac{1}{4}m_{12}^2 > 0.$$

С учетом (11), запишем систему (9)

$$\dot{\beta} = B\beta + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (12)$$

где $B = \begin{pmatrix} O_2 & \varepsilon^{3/2}E_2 \\ -\frac{k^2}{a^2}\varepsilon^{3/2}m & -\varepsilon E_2 \end{pmatrix}$.

Обозначая $\beta = (\xi, \eta)^T$, $\xi, \eta \in R^2$, получим систему (12) после исключения переменной η (с точностью до ε^2 включительно)

$$\ddot{\xi} + \varepsilon E_2 \dot{\xi} + \varepsilon^2 k^2 a^{-2} m \xi = 0. \quad (13)$$

Система (13) представляет линейный осциллятор с диссипацией механической системы с двумя степенями свободы, ее решение – экспоненциально убывающие функции.

Было проведено численное решение системы (5) при различных значениях параметров и различных начальных условиях, построены интегральные кривые. Из них следует качественное совпадение с поведением решений системы (13) (рис. 3–5). Для приведенных рисунков использовались следующие числовые значения: $a = 0,2, b_x = 0,6, b_y = 0,8$. Для рис. 3.

$\varepsilon = 0,1, kd^{-1} = 0,1, \Omega_0 = 100$; начальные условия: при $t = 0 \xi_1(0) = 0,1, \dot{\xi}_1(0) = 0, \xi_2(0) = 0,1, \dot{\xi}_2(0) = 0$. Рис. 4 соответствует значениям $\varepsilon = 0,05, kd^{-1} = 0,1, \Omega_0 = 500$; начальные условия: при

$t = 0 \xi_1(0) = 0,05, \dot{\xi}_1(0) = 0,05, \xi_2(0) = 0,05, \dot{\xi}_2(0) = 0,05$.

$\varepsilon = 0,05, kd^{-1} = 0,1, \Omega_0 = 500$; начальные условия: при $t = 0 \xi_1(0) = 0, \dot{\xi}_1(0) = 0,05, \xi_2(0) = 0, \dot{\xi}_2(0) = 0,05$.

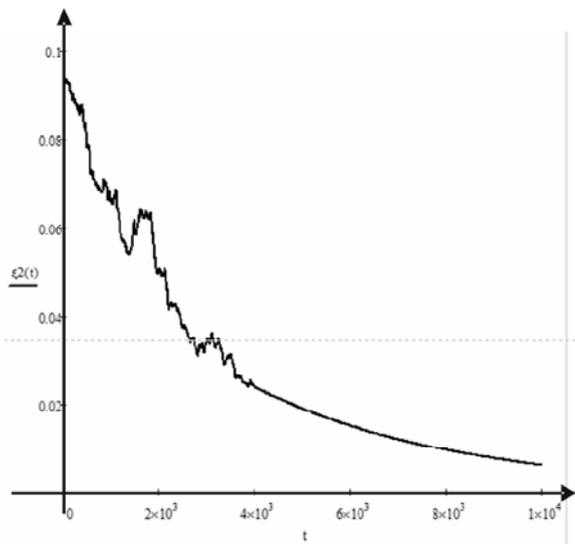
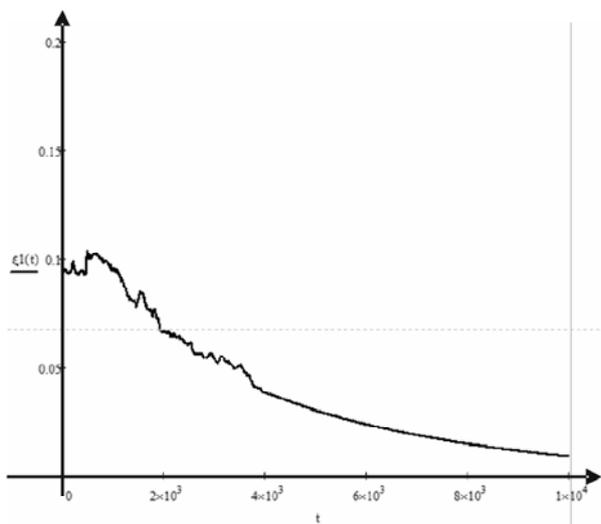


Рис. 3.

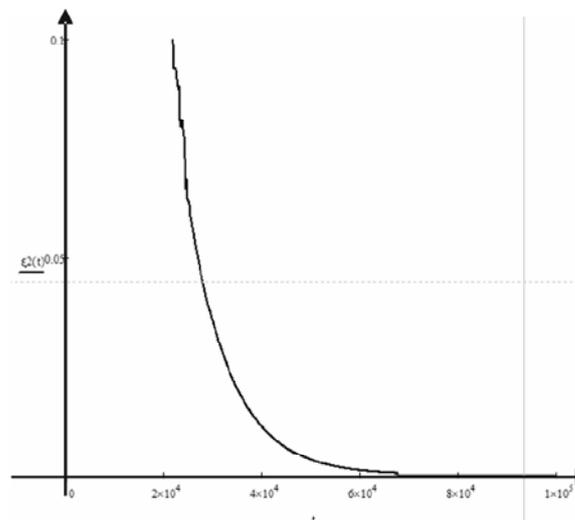
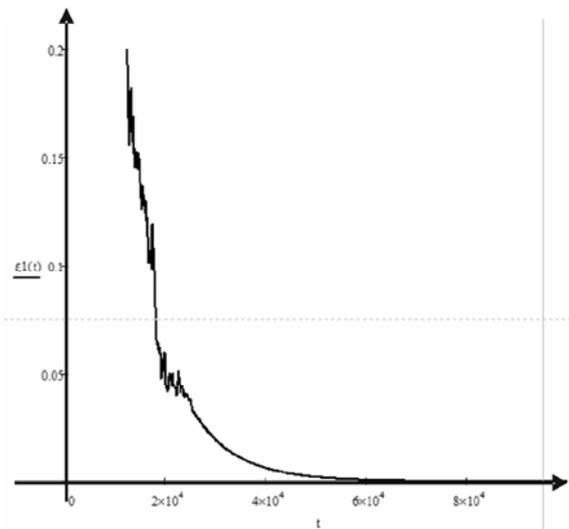


Рис. 4.

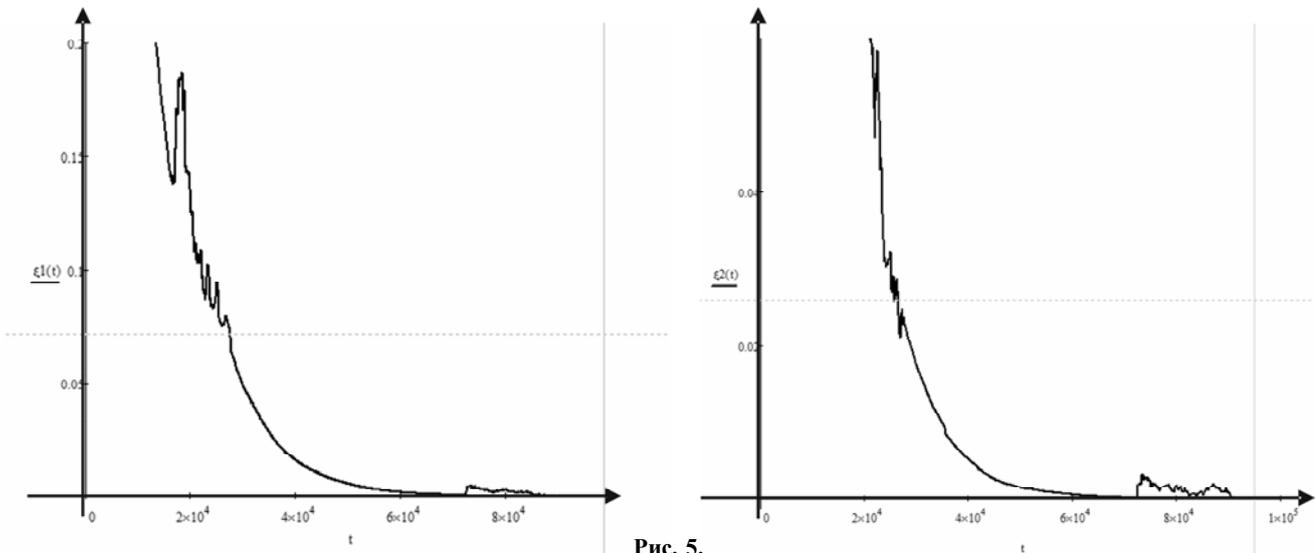


Рис. 5.

Перечень ссылок

1. Агафонов С. А. Об устойчивости установившихся движений вращающегося вала / С. А. Агафонов // Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. 1989. – № 6. – С. 61–65.
2. Lapshin R. U. Analytical model for the approximation of hysteresis loop and its application to the scanning tunnel microscope / R. U. Lapshin // Rev. Sci. Instrum. – 1995. – Vol. 66. – № 9. – P. 4718–4730.
3. Агафонов С. А. О стабилизации движения неконсервативных систем посредством параметрического возбуждения / С. А. Агафонов // Изв. РАН. Мех. тв. тела. – 1998. – № 2. – С. 199–202.

Одержано 27.04.2010

S. A. Agafonov, I. A. Kostushko

ROTOR DYNAMICS UNDER ACTION OF ELASTIC FORCE WITH HYSTERESIS

У роботі досліджується динаміка сталого руху врівноваженого ротора, що обертається за допомогою двигуна необмеженої потужності [1]; при цьому пружна сила, яка діє на ротор, має гістерезисну характеристику [2]. Рівняння руху описуються квазіперіодичною лінійною системою диференціальних рівнянь, для якої застосовується процедура редукції із заданою точністю до автономної з подальшим аналізом останньої.

Ключові слова: ротор, пружна сила, рівняння руху, дисипація, механічна система.

The rotor dynamics rotation with unlimited power engine help is researched. The elastic force has hysteresis characteristics during the action. Motion equations are described by quasi periodic linear system differential equations where the reduction technique with given accuracy is applied.

Key words: rotor, elastic force, movement equations, dissipation, mechanical system.