

УДК 539.312

Д-р фіз.-мат. наук В. І. Пожуєв<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук А. В. Пожуєв<sup>2</sup>, аспірант А. В. Фасоляк<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Запорізький національний технічний університет, <sup>2</sup>Запорізька державна інженерна академія;  
м. Запоріжжя

## НЕСТАЦІОНАРНА ДЕФОРМАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ПРУЖНОМУ НАПІВПРОСТОРІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

*Розглядається нескінченна циліндрична оболонка, яка знаходиться у тривимірному пружному інерційному напівпросторі з вільною поверхнею, причому вісь оболонки паралельна поверхні напівпростору. Вивчається випадок, коли до внутрішньої поверхні оболонки прикладаються врівноважені імпульсивні нормальні навантаження. Досліджується вплив нестационарної деформації оболонки на напружено-деформований стан напівпростору і на переміщення поверхні напівпростору. Проведено аналіз впливу глибини залягання оболонки від поверхні напівпростору на напружено-деформований стан такої системи.*

**Ключові слова:** циліндрична оболонка, пружний напівпростір, вільна поверхня напівпростору, динамічне навантаження, метод скінченних елементів.

### Вступ

На сьогодні досить добре досліджені динамічні задачі для циліндричних оболонок у необмеженому пружному інерційному просторі (при глибині залягання оболонки більше 5 діаметрів). У роботах [1–3], а також у монографії [4] розглянуто випадок рухомих навантажень, а в роботах [5–8] розглянуті подібні задачі у нестационарній постановці з використанням різних методів моделювання реакції простору.

Для оболонок неглибокого залягання потрібно враховувати вплив вільної поверхні пружного інерційного напівпростору. Подібним задачам для рухомих навантажень присвячена робота [9], а для рухомих періодичних навантажень для багатошарових оболонок – робота [10].

Ця робота присвячена динамічним задачам для пружних оболонок, які мають невелику глибину залягання у пружному інерційному напівпросторі із вільною поверхнею у нестационарній постановці. Також досліджується питання впливу глибини залягання на напружено-деформований стан системи оболонка-напівпростір.

### Постановка задачі

Розглядається нестационарна деформація нескінченно довгої циліндричної оболонки, яка знаходиться у лінійно-пружному, однорідному та ізотропному напівпросторі, причому вісь оболонки паралельна граніці напівпростору під дією навантажень, що діють на внутрішню поверхню оболонки та залежать від часу, як одинична функція Хевісайда. Нехай оболонка та напівпростір віднесені до нерухомої декартової системи координат  $\{x, y, z\}$ . Внутрішня поверхня оболонки задається рівнянням  $x^2 + y^2 = b^2$ , а поверхня контакту між напівпростором та оболонкою –  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $h = a - b$  – товщина оболонки). Контакт між оболон-

кою та напівпростором вважаємо жорстким. Площина, що обмежує напівпростір, задається рівнянням  $y = H$  ( $H > a$ ). У момент часу  $t < 0$  оболонка та простір знаходяться в стані спокою та вільні від напружень. Потім в момент часу  $t = 0$  прикладається імпульсивне, самоврівноважене навантаження, яке діє по нормалі до внутрішньої поверхні оболонки.

Слід зазначити, що в цій роботі приймається, що навантаження, яке діє на внутрішню поверхню оболонки рівномірно розподілене за її довжиною, тобто не залежить від змінної  $z$ , тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності.

Оскільки для оболонки і напівпростору використовуються точні рівняння, тоді потрібно знайти такі вектор-функції  $u^{(k)}(x, y, t) = (u_x^{(k)}(x, y, t), u_y^{(k)}(x, y, t))$ , що задовольняють динамічному рівнянню теорії пружності, яке у векторній формі має вигляд [11]:

$$(\lambda_k + 2\mu_k) \text{grad div} \left( \bar{u}^{(k)} \right) - \mu_k \text{rot rot} \left( \bar{u}^{(k)} \right) = \rho_k \frac{\partial^2 \bar{u}^{(k)}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де  $\lambda_k, \mu_k$  – параметри Ламе,  $\rho_k$  – щільність (тут значення індексу  $k = 1$  відповідає оболонці, а  $k = 2$  – напівпростору, що оточує оболонку).

Тоді граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_1} &= -f_x(x, y, t), \sigma_{yy}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_1} = -f_y(x, y, t), \\ \sigma_{xy}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_1} &= -f_{xy}(x, y, t), \sigma_{xx}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2} = \sigma_{xx}^{(2)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2}, \\ \sigma_{yy}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2} &= \sigma_{yy}^{(2)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2}, \sigma_{xy}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2} = \sigma_{xy}^{(2)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2}, \\ u_x^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2} &= u_x^{(2)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2}, u_y^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2} = u_y^{(2)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2}, \\ \sigma_{xx}^{(2)}(x, H, t) &= \sigma_{yy}^{(2)}(x, H, t) = \sigma_{xy}^{(2)}(x, H, t) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $\omega_1$  – внутрішня поверхня оболонки,  $\omega_2$  – границя контакту між оболонкою та напівпростором,  $f_x(x, y, t), f_y(x, y, t), f_{xy}(x, y, t)$  – відповідні компоненти навантаження, яке діє по нормалі до внутрішньої поверхні оболонки.

При цьому необхідні для задоволення граничних умов напруження виражаються через переміщення згідно з формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(k)} &= \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{2G_k\nu_k}{1-2\nu_k} \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial y}, \\ \sigma_{yy}^{(k)} &= \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial y} + \frac{2G_k\nu_k}{1-2\nu_k} \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x}, \\ \sigma_{xy}^{(k)} &= G_k \left( \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial x} \right),\end{aligned}\quad (3)$$

де  $\nu_k$  – коефіцієнти Пуасона,  $G_k$  – модулі зсуву матеріалу.

Початкові умови приймаються нульовими, тобто всі шукані величини та їх перші похідні за змінною часу при  $t = 0$  дорівнюють нулю.

Перейдемо тепер до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned}\{U_x^{(k)}, U_y^{(k)}\} &= \frac{1}{a} \{u_x^{(k)}, u_y^{(k)}\}, \\ \{\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}\}, F = \frac{f}{G_2}, \\ \{x_*, y_*\} &= \frac{1}{a} \{x, y\}; \tau = \frac{c_s}{a} t; \kappa = \frac{h}{a}; \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \\ d_1 = 1 - \kappa; c_s &= \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{\rho_2}}; H_* = \frac{H}{a}.\end{aligned}\quad (4)$$

Тоді співвідношення (3) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_{x_*x_*}^{(1)} &= \frac{2\gamma(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{\partial U_{x_*}^{(1)}}{\partial x_*} + \frac{2\gamma\nu_1}{1-2\nu_1} \frac{\partial U_{y_*}^{(1)}}{\partial y_*}, \\ \sigma_{x_*x_*}^{(2)} &= \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_{x_*}^{(2)}}{\partial x_*} + \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_{y_*}^{(2)}}{\partial y_*}, \\ \sigma_{y_*y_*}^{(1)} &= \frac{2\gamma(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{\partial U_{y_*}^{(1)}}{\partial y_*} + \frac{2\gamma\nu_1}{1-2\nu_1} \frac{\partial U_{x_*}^{(1)}}{\partial x_*}, \\ \sigma_{y_*y_*}^{(2)} &= \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_{y_*}^{(2)}}{\partial y_*} + \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_{x_*}^{(2)}}{\partial x_*}, \\ \sigma_{x_*y_*}^{(1)} &= \gamma \left( \frac{\partial U_{x_*}^{(1)}}{\partial y_*} + \frac{\partial U_{y_*}^{(1)}}{\partial x_*} \right), \sigma_{x_*y_*}^{(2)} = \left( \frac{\partial U_{x_*}^{(2)}}{\partial y_*} + \frac{\partial U_{y_*}^{(2)}}{\partial x_*} \right).\end{aligned}\quad (5)$$

При цьому граничні умови (2) перепишуться так:

$$\begin{aligned}\sigma_{x_*x_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_1} &= -F_{x_*}(x_*, y_*, \tau), \\ \sigma_{y_*y_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_1} &= -F_{y_*}(x_*, y_*, \tau), \\ \sigma_{x_*y_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_1} &= -F_{x_*y_*}(x_*, y_*, \tau), \\ \sigma_{x_*x_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2} &= \sigma_{x_*x_*}^{(2)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2}, \\ \sigma_{y_*y_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2} &= \sigma_{y_*y_*}^{(2)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2}, \\ \sigma_{x_*y_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2} &= \sigma_{x_*y_*}^{(2)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2}, \\ U_{x_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2} &= U_{x_*}^{(2)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2}, \\ U_{y_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2} &= U_{y_*}^{(2)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2}, \\ \sigma_{x_*x_*}^{(2)}(x_*, H_*, \tau) &= \sigma_{y_*y_*}^{(2)}(x_*, H_*, \tau) = \sigma_{x_*y_*}^{(2)}(x_*, H_*, \tau) = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Тут  $\omega_1$  – безрозмірна внутрішня поверхня оболонки ( $x_*^2 + y_*^2 = d_1^2$ ),  $\omega_2$  – безрозмірна границя контакту між оболонкою та напівпростором ( $x_*^2 + y_*^2 = 1$ ).

### Варіаційна постановка задачі

Перейдемо тепер до варіаційної постановки задачі. Нехай  $\delta U^{(k)} = (\delta U_{x_*}^{(k)}, \delta U_{y_*}^{(k)})$  – додаткові можливі безрозмірні переміщення точок тіла  $\Omega$ . Тоді  $\delta \varepsilon^{(k)} = (\delta \varepsilon_{x_*x_*}^{(k)}, \delta \varepsilon_{y_*y_*}^{(k)}, \delta \varepsilon_{x_*y_*}^{(k)})$  – можливі безрозмірні деформації, які відповідають можливим переміщенням  $\delta U^k = (\delta U_{x_*}^{(k)}, \delta U_{y_*}^{(k)})$  та задаються такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\delta \varepsilon_{x_*x_*}^{(k)} &= \frac{\partial(\delta U_{x_*}^{(k)})}{\partial x_*}, \delta \varepsilon_{y_*y_*}^{(k)} = \frac{\partial(\delta U_{y_*}^{(k)})}{\partial y_*}, \\ \delta \varepsilon_{x_*y_*}^{(k)} &= \frac{\partial(\delta U_{x_*}^{(k)})}{\partial y_*} + \frac{\partial(\delta U_{y_*}^{(k)})}{\partial x_*}.\end{aligned}$$

Нехай тіло знаходиться у рівновазі під дією поверхневих сил  $F$  та внутрішніх сил  $R$ . Причому поверхневі сили діють на поверхні  $\varpi$  (у цьому випадку  $\varpi = \varpi_1 \cup \{(x_*, y_*) \in R^2 \mid y_* = H_*\}$ ), що обмежує тіло  $\Omega$ , а внутрішні всередині області  $\Omega$ . Розглянемо тепер варіаційне рівняння Лагранжа [12]:

$$\delta \bar{V}^{(k)} = 0, \quad (7)$$

де  $\bar{V}^{(k)} = \bar{U}^{(k)} + \Pi^{(k)}$  – повна безрозмірна потенціальна енергія оболонки та напівпростору, що оточує оболонку. Перетворимо вираз (7) таким чином:

$$\delta \bar{U}^{(k)} = \iint_{\Omega} (\bar{\sigma}_{x^*x^*} \delta \varepsilon_{x^*x^*} + \bar{\sigma}_{y^*y^*} \delta \varepsilon_{y^*y^*} + \bar{\sigma}_{x^*y^*} \delta \varepsilon_{x^*y^*}) d\Omega, \quad (8)$$

$$\delta \Pi^{(k)} = - \iint_{\omega} (\delta U^{(k)})^T F d\omega - \iint_{\Omega} (\delta U^{(k)})^T R d\Omega. \quad (9)$$

Вираз (8) є варіацією безрозмірної енергії деформації, а (9) – варіація безрозмірної роботи зовнішніх сил. Тоді, згідно до варіаційного принципу Лагранжа [12] потрібно знайти такі значення переміщень  $\delta U^{(k)}$ , для яких повна енергія системи мінімальна, тобто такі переміщення, які задовольняють варіаційному рівнянню Лагранжа (7).

**Розв’язання задачі методом скінчених елементів**

Отримаємо матрицю жорсткості для плоского трикутного скінченного елемента [13]. Нехай вузли елемента розташовуються на вершинах трикутника і задані координати цих вершин:  $(x_{*i}, y_{*i}), (x_{*j}, y_{*j}), (x_{*m}, y_{*m})$  еквівалентні вузлові навантаження. Матриці переміщень та сил для кожного з вузлів складаються з двох елементів. Тоді для вузла  $i$  маємо:

$$\begin{bmatrix} \delta V_i \\ \delta V_{iy^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta V_{ix^*} \\ \delta V_{iy^*} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} F_i^e \\ F_{iy^*}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix^*}^e \\ F_{iy^*}^e \end{bmatrix}.$$

При складанні матриць  $\begin{bmatrix} \delta V^e \\ F^e \end{bmatrix}$ , елемент буде обходити проти годинникової стрілки. Тоді:

$$\begin{bmatrix} \delta V^e \\ F^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta V_i \\ \delta V_j \\ \delta V_k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} F^e \\ F^e \\ F^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{bmatrix}.$$

Точки елемента отримують переміщення  $\delta U_{x^*}$  та  $\delta U_{y^*}$ . Тому матриця  $\delta U$  має вигляд:

$$\delta U = \begin{bmatrix} \delta U_{x^*} \\ \delta U_{y^*} \end{bmatrix}.$$

Ці переміщення можна виразити в такому вигляді [13]:

$$\delta U = [\alpha] \begin{bmatrix} \delta V^e \\ F^e \end{bmatrix}, \quad (10)$$

або

$$\delta U = [\alpha] \delta V = \begin{bmatrix} \alpha_{ix^*} & \alpha_{jx^*} & \alpha_{mx^*} \\ \alpha_{iy^*} & \alpha_{jy^*} & \alpha_{my^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta V_i \\ \delta V_j \\ \delta V_m \end{bmatrix}.$$

Для отримання матриці  $[\alpha]$  будемо вважати, що переміщення  $\delta U_{x^*}$  та  $\delta U_{y^*}$  змінюються за лінійним законом:

$$\delta U_{x^*} = l_1 + l_2 x^* + l_3 y^*, \quad \delta U_{y^*} = l_4 + l_5 x^* + l_6 y^*,$$

де  $l_i$  – деякі сталі ( $i = \overline{1,6}$ ).

У вершинах трикутника  $\delta U_{x^*}$  та  $\delta U_{y^*}$  повинні збігатися з вузловими переміщеннями, тому маємо систему з шести рівнянь для відшукування невідомих  $l_i$ :  
при

$$x^* = x_{*r}, y^* = y_{*r} \rightarrow \delta U_{x^*} = \delta V_{x^*r}, \delta U_{y^*} = \delta V_{y^*r},$$

$$(r = i, j, m).$$

Отримана система буде мати дві незалежні групи рівнянь. Перша система відносно невідомих  $l_1, l_2, l_3$ , а друга група відносно  $l_4, l_5, l_6$ . Розв’язавши першу групу рівнянь, будемо мати:

$$l_1 = \frac{1}{2S} (\alpha_i \delta V_{ix^*} + \alpha_j \delta V_{jx^*} + \alpha_m \delta V_{mx^*}),$$

$$l_2 = \frac{1}{2S} (z_i \delta V_{ix^*} + z_j \delta V_{jx^*} + z_m \delta V_{mx^*}),$$

$$l_3 = \frac{1}{2S} (c_i \delta V_{ix^*} + c_j \delta V_{jx^*} + c_m \delta V_{mx^*}),$$

де  $\alpha_i = x_{*j} y_{*m} - x_{*m} y_{*j}$ ,  $z_i = y_{*j} - y_{*m}$ ,  $c_i = x_{*m} - x_{*j}$ . Інші коефіцієнти отримуються за допомогою циклічної перестановки індексів. Величина  $S$  – площа відповідного трикутника. Коефіцієнти  $l_4, l_5, l_6$  отримуються аналогічно.

Отже, переміщення можна записати у вигляді:

$$\delta U = \begin{bmatrix} \delta U_{x^*} \\ \delta U_{y^*} \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta V_i \\ \delta V_j \\ \delta V_m \end{bmatrix},$$

де  $\psi_r = \alpha_r + z_r x^* + c_r y^*$ , ( $r = i, j, m$ ).

Таким чином маємо:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{x^*r} \\ \alpha_{y^*r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} [\psi_r \quad 0], \quad \begin{bmatrix} \alpha_{x^*r} \\ \alpha_{y^*r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} [0 \quad \psi_r]$$

$$(r = i, j, m).$$

Тоді

$$\begin{bmatrix} \alpha_{x^*} \\ \alpha_{y^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{x^*i} & \alpha_{x^*j} & \alpha_{x^*m} \\ \alpha_{y^*i} & \alpha_{y^*j} & \alpha_{y^*m} \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриці  $[\alpha_{x^*}]$  та  $[\alpha_{y^*}]$ , тоді задамо матрицю  $[\beta]$  у такому самому вигляді:

$$[\beta] = [\beta_i \quad \beta_j \quad \beta_m],$$

де типова підматриця  $[\beta_r]$  обчислюється наступним чином:

$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_{x^* r}}{\partial x^*} \\ \frac{\partial \alpha_{y^* r}}{\partial y^*} \\ \frac{\partial \alpha_{x^* r}}{\partial y^*} + \frac{\partial \alpha_{y^* r}}{\partial x^*} \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} z_r & 0 \\ 0 & c_r \\ c_r & z_r \end{bmatrix}.$$

Тоді для деформацій елемента отримаємо:

$$[\varepsilon] = [\beta_i \quad \beta_j \quad \beta_m] \begin{bmatrix} \delta V_i \\ \delta V_j \\ \delta V_m \end{bmatrix},$$

а для матриці напружень:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon],$$

де

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{2g_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} & \frac{2g_k\nu_k}{1-2\nu_k} & 0 \\ \frac{2g_k\nu_k}{1-2\nu_k} & \frac{2g_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} & 0 \\ 0 & 0 & g_k \end{bmatrix},$$

де  $g_k = \begin{cases} \gamma, & k=1; \\ 1, & k=2. \end{cases}$  Тобто,  $g_k = \gamma$ , якщо відповідний елемент належить оболонці, а  $g_k = 1$  – коли елемент належить напівпростору.

Знайдемо, згідно з (8), матрицю жорсткості скінченного елемента [13]:

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} [\beta]^T [D][\beta] d\Omega^e = [\beta]^T [D][\beta] \int_{\Omega^e} d\Omega^e = S q [\beta]^T [D][\beta],$$

де  $q$  – товщина скінченного елемента. Оскільки ми розглядаємо плоский випадок задачі теорії пружності, тому далі будемо вважати, що  $q = 1$ .

Маємо:

$$[K^e] = S \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_j \\ \beta_m \end{bmatrix} [D] [\beta_i \quad \beta_j \quad \beta_m] = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix},$$

де

$$[K_{rn}^e] = S [\beta_r] [D] [\beta_m] = \frac{g_k}{4S} \begin{bmatrix} c_r c_n & c_r z_n \\ z_r c_n & z_r z_n \end{bmatrix} + \frac{g_k}{2(1-2\nu_k)S} \begin{bmatrix} (1-\nu_k)z_r z_n & \nu_k z_r c_n \\ \nu_k c_r z_n & (1-\nu_k)c_r c_n \end{bmatrix},$$

$(r, n = i, j, m).$

Глобальна матриця жорсткості формується шляхом додавання відповідних блоків матриць жорсткості для окремих елементів згідно з глобальною нумерацією вузлів.

Отримаємо тепер вирази для еквівалентних вузлових навантажень. Нехай до тіла прикладена сила  $F$ , тоді згідно з (9) маємо [13]:

$$[F^e] = - \int_{\Omega^e} [\alpha] \begin{bmatrix} F_{x^*} \\ F_{y^*} \end{bmatrix} d\Omega^e. \quad (11)$$

Глобальний вектор правих частин формується аналогічно до формування глобальної матриці жорсткості. У результаті отримуємо глобальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь статичної рівноваги тіла відносно вузлових перемішень [13]:

$$[K][\delta V] - [F] = 0. \quad (12)$$

Отримаємо тепер скінченно-елементне рівняння для розв'язання динамічних задач. Для отримання динамічного рівняння, сила  $F$  в кожен момент часу замінюється еквівалентом [13]:

$$[F] - \bar{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [\delta U], \quad (13)$$

де  $\bar{\rho} = \rho^*$  для елементів, які належать оболонці;  $\bar{\rho} = 1$  – для елементів, які належать напівпростору;  $[F]$  – динамічне навантаження, яке діє на тіло, що розглядається.

Тоді еквівалентні динамічні вузлові сили, задані співвідношенням (13), мають вигляд [13]:

$$[F^e]_d = - \int_{\Omega^e} [\alpha][F] d\Omega^e + \int_{\Omega^e} [\alpha] \bar{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [\delta U] d\Omega^e = [F^e] + \bar{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_{\Omega^e} [\alpha][\delta U] d\Omega^e,$$

де  $[F^e]$  – еквівалентні вузлові навантаження, які задаються співвідношенням (11), та залежать від змінної безрозмірного часу.

Враховуємо співвідношення (10) та підставляємо вираз (14) у рівняння рівноваги (12). Отримуємо диференціальне матричне рівняння:

$$[K][\delta V] + [M] \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [\delta V] - [F] = 0, \quad (15)$$

де  $[K]$ ,  $[F]$  – матриця жорсткості та еквівалентних вузлових навантажень відповідно. Нова матриця  $[M]$  – матриця мас, яка для кожного елемента визначається таким співвідношенням [13]:

$$[M^e] = \int_{\Omega^e} [\alpha] \bar{\rho} [\alpha]^T d\Omega^e = \frac{\bar{\rho} S}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Глобальна матриця мас формується аналогічним до глобальної матриці жорсткості.

Таким чином статичну задачу можна звести до знаходження вузлових переміщень  $[\delta V]$  зі СЛАР (12), а загальні переміщення в межах відповідних елементів задаються співвідношеннями (10), а відповідні напруження – співвідношеннями (5). У свою чергу динамічна задача зводиться до розв’язання матричного диференціального рівняння (15), у результаті чого знаходяться значення вузлових переміщень в кожен момент часу, а відповідні переміщення та напруження всередині елемента знаходяться за допомогою співвідношень (10) та (5) відповідно.

### Розв’язання матричного диференціального рівняння

Для розв’язання матричного диференціального рівняння (15) будемо використовувати чисельний метод, який має назву  $\theta$ -метод Вільсона. Основна ідея полягає у припущенні, що зміна прискорення на розширеному проміжку безрозмірного часу від  $\tau$  до  $\tau + \theta \Delta\tau$  відбувається за лінійним законом [14]:

$$\delta \ddot{V}_{\tau+\phi} = \delta \ddot{V}_{\tau} + \frac{\phi}{\theta \Delta\tau} \left( \delta \ddot{V}_{\tau+\theta \Delta\tau} - \delta \ddot{V}_{\tau} \right), \quad (17)$$

де  $0 \leq \tau \leq \theta \Delta\tau$ ;  $\theta \geq 1,37$ .

Після інтегрування виразу (17) можна отримати рівняння зміни швидкості та прискорення:

$$\delta \dot{V}_{\tau+\phi} = \delta \dot{V}_{\tau} + \delta \ddot{V}_{\tau} \phi + \frac{\phi^2}{2\theta \Delta\tau} \left( \delta \ddot{V}_{\tau+\theta \Delta\tau} - \delta \ddot{V}_{\tau} \right), \quad (18)$$

$$\delta V_{\tau+\phi} = \delta V_{\tau} + \delta \dot{V}_{\tau} \phi + \frac{1}{2} \delta \ddot{V}_{\tau} \tau^2 + \frac{\phi^3}{6\theta \Delta\tau} \left( \delta \ddot{V}_{\tau+\theta \Delta\tau} - \delta \ddot{V}_{\tau} \right). \quad (19)$$

Співвідношення (18) и (19) для моменту часу  $t + \theta \Delta\tau$  можна переписати у вигляді:

$$\delta \dot{V}_{\tau+\theta \Delta\tau} = \delta \dot{V}_{\tau} + \delta \ddot{V}_{\tau} \tau + \frac{\theta \Delta\tau}{2} \left( \delta \ddot{V}_{\tau+\theta \Delta\tau} + \delta \ddot{V}_{\tau} \right),$$

$$\delta V_{\tau+\theta \Delta\tau} = \delta V_{\tau} + \theta \Delta\tau \delta \dot{V}_{\tau} + \frac{\theta^2 (\Delta\tau)^2}{6} \left( \delta \ddot{V}_{\tau+\theta \Delta\tau} + \delta \ddot{V}_{\tau} \right),$$

Далі, беремо в якості незалежної змінної стовпець вузлових переміщень  $u_{t+\theta h}$ , можна отримати:

$$\delta \dot{V}_{\tau+\theta \Delta\tau} = \frac{6}{\theta^2 (\Delta\tau)^2} \left( \delta V_{\tau+\theta \Delta\tau} - \delta V_{\tau} \right) - \frac{6}{\theta \Delta\tau} \delta \dot{V}_{\tau} - 2 \delta \ddot{V}_{\tau},$$

$$\delta \dot{V}_{\tau+\theta \Delta\tau} = \frac{3}{\theta \Delta\tau} (\delta V_{\tau+\theta \Delta\tau} - \delta V_{\tau}) - 2 \delta \dot{V}_{\tau} - \frac{\theta \Delta\tau}{2} \delta \ddot{V}_{\tau}.$$

Оскільки прискорення на відріжку часу  $[\tau, \tau + \theta \Delta\tau]$  змінюється лінійно, тоді можна припустити, що і вектор навантаження так само може змінюватися на ньому лінійно. Тоді:

$$F_{\tau+\theta \Delta\tau} = F_{\tau} + \theta (F_{\tau+\theta \Delta\tau} - F_{\tau}). \quad (22)$$

Після підстановки виразів (20)–(22) в (15) можна отримати рівняння квазістатичної рівноваги [14]:

$$\bar{K} \delta V_{\tau+\theta \Delta\tau} = \bar{F}_{\tau+\theta \Delta\tau}, \quad (23)$$

де

$$\bar{K} = K + \frac{6}{\theta^2 (\Delta\tau)^2} M,$$

$$\bar{F}_{\tau+\theta \Delta\tau} = F_{\tau+\theta \Delta\tau} + M \left( \frac{6}{\theta^2 (\Delta\tau)^2} \delta V_{\tau} + \frac{6}{\theta \Delta\tau} \delta \dot{V}_{\tau} + 2 \delta \ddot{V}_{\tau} \right).$$

Отже, застосувавши  $\theta$ -метод Вільсона дозволив звести розв’язок нестационарної задачі (15) до розв’язку ітераційної послідовності квазістатичних задач (23).

### Метод розв’язання СЛАР

Оскільки матриця системи  $[K]$  та  $[\bar{K}]$  в рівняннях (12) та (23) симетричні та додатньовизначені [13], тоді для розв’язку цих систем можна застосовувати метод спряжених градієнтів [15]. Наведемо алгоритм даного методу на прикладі системи (23).

Обирається початкове наближення розв'язку  $\delta V_0$  та похибка  $\varepsilon$ . На попередньому етапі обчислюються такі величини:

$$R_0 = F - \bar{K} \delta V_0; P_0 = R_0.$$

Далі для  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ :

$$\xi_j = \frac{(R_j, R_j)}{(\bar{K} P_j, P_j)}; \delta V_{j+1} = \delta V_j + \xi_j P_j;$$

$$R_{j+1} = R_j - \xi_j \bar{K} P_j; \zeta_j = \frac{(R_{j+1}, R_{j+1})}{(R_j, R_j)}.$$

Якщо  $\|R_{j+1}\| = \sqrt{(R_{j+1}, R_{j+1})} < \varepsilon$ , тоді отримано розв'язок, в іншому випадку  $P_{j+1} = R_{j+1} + \zeta_j P_j$ , та збільшити  $j$ .

### Результати чисельного аналізу

Розглянемо випадок, коли у момент часу  $\tau = 0$  прикладається імпульсивне навантаження  $F(x_*, y_*, \tau) = F(x_*, y_*) H(\tau)$ , яке діє по нормалі до внутрішньої поверхні оболонки на ділянці  $x_* \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ,  $y_* \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$  та залежить від часу як одинична функція Хевісайда. Оскільки навантаження діє симетрично відносно осі  $Oy_*$ , тому можна зробити розріз області  $\Omega$  по цій осі та врахувати цей розріз за допомогою умови  $\delta U_{x_*} \Big|_{x_*=0} = 0$ .

Розрахунки, зокрема формування матриць жорсткості та мас, було проведено для таких значень безрозмірних величин:

$$\kappa = 0,02; \gamma = 30; \rho^* = 4; d_1 = 1 - \kappa = 0,98.$$

Величини  $x_*, y_*, \tau, H_*$  – змінювались.

Спочатку розглянемо ситуацію при  $H_* = 2$ .

Рис. 1 ілюструє деформацію границі контакту оболонки та напівпростору, причому крива 3 –  $\tau = 0,5$ , крива 2 –  $\tau = 1$ , крива 1 –  $\tau = 5$ , пунктиром позначено статичний розв'язок, а точками – початкове положення границі контакту. На рис 2 та 3 проілюстровано переміщення вільної поверхні у аналогічні моменти часу. На рис. 4–6 проілюстровані напруження у різні моменти часу порівняно зі статичним розв'язком.

На рис. 7, 8 проілюстровано розподіл переміщень  $U_{y_*}$  напівпростору по осі  $Oy_*$  від границі контакту оболонки і напівпростору до вільної поверхні в моменти

часу, як і на рис 1. Зокрема на рис. 7  $H_* = 4$ , а на рис. 8 –  $H_* = 6$ .

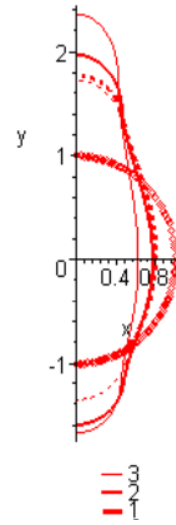


Рис. 1. Деформація границі контакту оболонки та напівпростору в різні моменти часу для навантаження, що залежить від часу як одинична функція Хевісайда

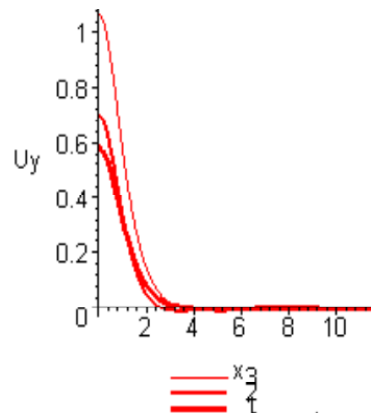


Рис. 2. Переміщення вільної поверхні в різні моменти часу для навантаження, що залежить від часу як одинична функція Хевісайда

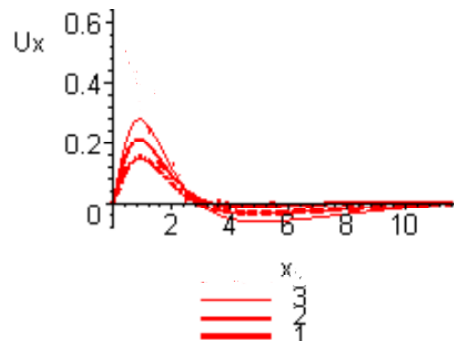
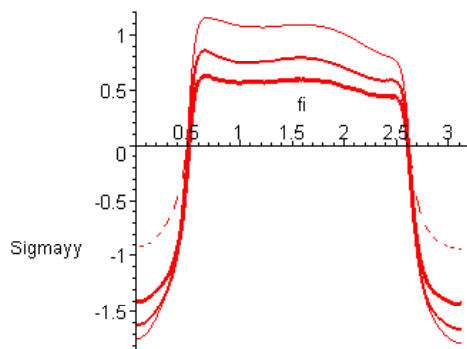
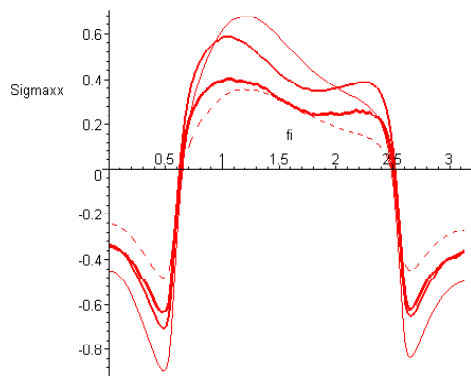


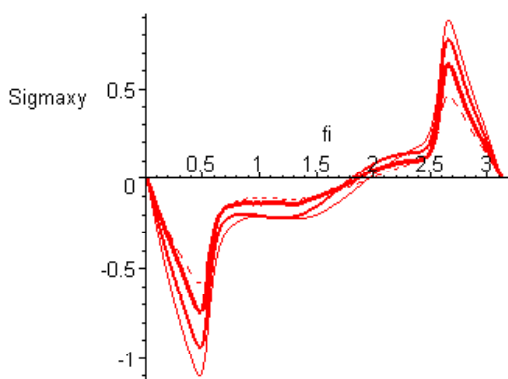
Рис. 3. Переміщення вільної поверхні в різні моменти часу для навантаження, що залежить від часу як одинична функція Хевісайда



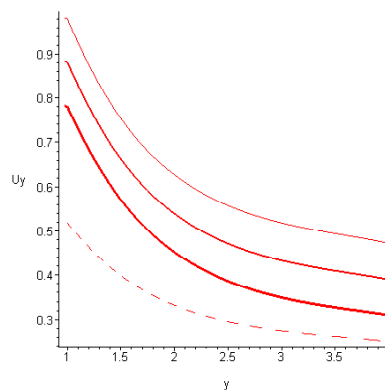
**Рис. 4.** Розподіл напружень  $\bar{\sigma}_{y^*y^*}$  оболонки на гранці контакту з напівпростором за кутовою координатою в різні моменти часу для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда



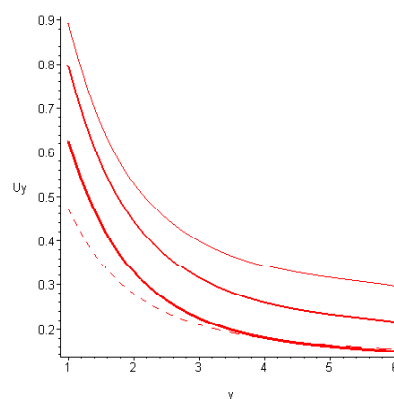
**Рис. 5.** Розподіл напружень  $\bar{\sigma}_{x^*x^*}$  оболонки на гранці контакту з напівпростором за кутовою координатою в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда



**Рис. 6.** Розподіл напружень  $\bar{\sigma}_{x^*y^*}$  оболонки на гранці контакту з напівпростором за кутовою координатою в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда



**Рис. 7.** Розподіл переміщень  $U_{y^*}$  напівпростору по осі  $Oy^*$  в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда



**Рис. 8.** Розподіл переміщень  $U_{y^*}$  напівпростору по осі  $Oy^*$  в різні моменти часу для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

### Висновки

Отримано розв'язок нестационарної задачі для циліндричної оболонки у пружному інерційному напівпросторі з вільною поверхнею. Для аналізу динамічного напружено-деформованого стану цієї системи застосовано метод скінченних елементів. Для навантаження, яке залежить від часу як одинична функція Хевісайда, отримано збіжність переміщень та напружень оболонки на границі контакту з напівпростором до відповідного статичного розв'язку. Проаналізовано залежність величини переміщень вільної поверхні від глибини залягання оболонки.

### Список літератури

1. Львовский В. М. Установившиеся колебания цилиндрической оболочки в упругой среде под действием подвижной нагрузки / Львовский В. М., Онищенко В. И., Пожув В. И. // Вопросы прочности и пластичности. – Днепропетровск, 1974 – С. 98–110.
2. Пожув В. И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде / Пожув В. И. //

- Строительная механика и расчет сооружений. – 1976. – № 1. – С. 44–46.
3. Пожуев В. И. Реакция цилиндрической оболочки, находящейся в трансверсально-изотропной среде, на действие подвижной нагрузки / Пожуев В. И. // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16. – № 11. – С. 28–35.
  4. Горшков А. Г. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок // Горшков А. Г., Пожуев В. И. – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 136 с.
  5. Пожуев В. И. Нестационарная реакция цилиндрической оболочки в упругой среде на действие неосесимметрической подвижной нагрузки / Пожуев В. И., Жибитай Мохаммед. – Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 6. – С. 33–37.
  6. Пожуев В. И. Нестационарные колебания трубопровода конечной длины, односторонне взаимодействующего с инерционной средой // Пожуев В. И., Жибитай Мохаммед. – Изв. ВУЗов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 48–50.
  7. Пожуев А. В. Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень / Пожуев А. В., Фасоляк А. В. – Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2015. – № 2. – С. 108–114.
  8. Пожуев А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються / Пожуев А. В. Фасоляк А. В. // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 200–213.
  9. Алексеева Л. А. Математическое моделирование динамики тоннелей и трубопроводов мелкого заложения / Алексеева Л. А. Украинец В. Н. – Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4–5. – С. 1954–1956.
  10. Задача о действии подвижной периодической нагрузки на многослойную тонкостенную оболочку в упругом полупространстве / [Украинец В. Н. Бейсембаев М. К., Гирнис С. Р., Тлеулесов А. К.]. // Наука и техника Казахстана. – 2010 – № 4. – С. 97–104.
  11. Новацкий В. Теория упругости / Новацкий В. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
  12. Образцов И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. – М. : Высшая школа, 1985. – 393 с.
  13. Зинкевич О. Метод конечных элементов в технике / Зинкевич О. – М. : Мир, 1975. – 543 с.
  14. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Бате К., Вилсон Е. – М. : Стройиздат, 1982 – 448 с.
  15. Баладин М. Ю. Методы решения СЛАУ большой размерности / Баладин М. Ю. Шурина Э. П. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000. – 70 с.

Одержано 10.03.2016

**Пожуев В.И., Пожуев А.В., Фасоляк А.В. Нестационарная деформация цилиндрической оболочки в упругом полупространстве со свободной поверхностью**

*Рассматривается бесконечная цилиндрическая оболочка, находящаяся в трехмерном упругом инерциальном полупространстве со свободной поверхностью, причем ось оболочки параллельна поверхности полупространства. Изучается случай, когда к внутренней поверхности оболочки прикладываются уравновешенные импульсивные нормальные нагрузки. Изучается влияние нестационарной деформации оболочки на напряженно-деформированное состояние полупространства и на перемещения поверхности полупространства. Проведен анализ влияния глубины заложения оболочки от поверхности полупространства на напряженно-деформированное состояние такой системы.*

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, упругое полупространство, свободная поверхность полупространства, динамическая нагрузка, метод конечных элементов.

**Pozhuev V., Pozhuev A., Fasoliak A. Non-stationary deformation of the cylindrical shell in the elastic half-space with free surface**

*An infinite cylindrical shell, located in a three-dimensional elastic inertial half-space with a free surface, the shell axis is parallel to the surface of the half-space is considered. Case when to the inner surface of the shell applied normal balanced impulsive loads is studied. The influence of non-stationary shell deformation on the stress-strain state of half-space and moving of the half-space surface are studied. The influence of the depth of the shell location from the half-space surface on the stress-strain state of that system is analyzed.*

**Key words:** cylindrical shell, elastic half-space, free surface of the half-space, dynamic loads, finite element method.