IV МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В МЕТАЛУРГІЇ ТА МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 517. 956. 22

Канд. фіз.-мат. наук І. А. Костюшко[1], канд. фіз.-мат. наук В. А. Куземко[2]

[1]Запорізький національний університет, м. Запоріжжя
[2]Університет митної справи та фінансів, м. Дніпро

СТАБІЛІЗАЦІЯ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ЦИРКУЛЯРНИМИ СИЛАМИ

Розглядається випадок, коли лінійна потенціальна система має довільне число від'ємних коефіцієнтів стійкості. Вирішується задача про стабілізацію (до стійкості) нестійкої потенціальної системи циркулярними силами. Отримано умови стійкості у термінах вихідної системи.

***Ключові слова**: циркулярна система, функція Ляпунова, стійкість системи,стабілізація нестійкої системи, додатна визначеність матриці.*

У нормальних координатах лінійні рівняння збуреного руху циркулярної системи (на яку діють потенціальні та позиційні неконсервативні сили – циркулярні сили) мають вигляд:

$$\ddot{x} + Kx + Fx = 0, \quad x \in R^n,$$
$$K = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), F^T = -F. \tag{1}$$

Вважаємо, що всі коефіцієнти $\lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j)$ і розташовані в порядку зменшення зі зростанням індексу $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_n$.

Розглянемо функцію

$$2V = \dot{x}^T (E + C)\dot{x} + x^T Dx, \tag{2}$$

де E – одинична матриця, а симетричні матриці C та D невідомі і належать визначенню. Крім того, на головній діагоналі матриці C стоять нулі. Похідна $\dot{V}$, визначена згідно з системою (1), $\dot{V} = 0$ при $D = (K - F)(E + C)$. Оскільки $D^T = D$, то остання умова приводить до матричного рівняння для визначення матриці C

$$(K - F)C - C(K + F) = 2F. \tag{3}$$

Неважко помітити, що у скалярному вигляді матричне рівняння (3) уявляє собою лінійну систему порядку $n(n-1)/2$, а кількість невідомих c_{ij} – елементів матриці C, збігається з цим порядком.

Розв'язок матричного рівняння Ляпунова (3) будемо шукати у вигляді

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} C_k, \tag{4}$$

а матриці $C_k \ \left(k = \overline{1,\infty}\right)$ відповідають нескінченній системі матричних рівнянь

$$\begin{cases} KC_1 - C_1K = 2F, \\ KC_2 - C_2K = FC_1 + C_1F, \\ \text{...} \\ KC_r - C_rK = FC_{r-1} + C_{r-1}F, \ (r = 3,4,...) \\ \text{...} \end{cases} \tag{5}$$

Згідно з рівняннями системи (5) можна отримати оцінки для норм матриць $C_k \ (k = 1,2,...)$

$$\|C_1\| < \frac{2\|F\|}{s}, \quad \|C_2\| < \left(\frac{2\|F\|}{s}\right)^2, ..., \tag{6}$$

де $s = \min\limits_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \left|\lambda_i - \lambda_j\right|$, а норма матриць C_k визначається

згідно з формулою: $\|C_k\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|c_{ij}\right|$, c_{ij} – елементи матриці C_k.

Згідно з (6) при виконанні нерівності $s > 2\|F\|$ із (4) отримуємо оцінку за нормою матриці C

$$\|C\| < \frac{2\|F\|}{s - 2\|F\|}. \tag{7}$$

Матриця $E+C$ додатна визначена, якщо всі власні значення матриці C належать інтервалу $(-1,1)$ [2] або $\|C\|<1$. Із врахуванням (7), отримуємо умову додатної визначеності матриці $E+C$

$$\|F\|<\frac{1}{4}s. \tag{8}$$

Доведемо, що характеристичне рівняння системи (1) $\det\left(E\lambda^2+K+F\right)$ збігається із характеристичним рівнянням системи

$$\ddot{x}+Lx=0,\quad L=L^T=(E+C)^{-1/2}D(E+C)^{-1/2}. \tag{9}$$

В (9) матриця C відповідає рівнянню (3). Оскільки $(E+C)^{-1}D=K+F$ та

$$\det\left[(E+C)\lambda^2+D\right]=\left[\det(E+C)^{1/2}\right]^2\det\left(E\lambda^2+L\right).$$

Застосовуючи розклад матриці L за Тейлором, можна показати, що її можна представити у вигляді $L=L_0+L_1$. Елементи матриці $L_0=(l_{ij})$ мають вигляд

$$l_{ij}=\lambda_j\delta_{ij}+\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\lambda_i+\lambda_j\right)-\lambda_r\right]f_{ir}f_{ri}\Big/\left[(\lambda_i-\lambda_r)(\lambda_j-\lambda_r)\right]$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Використовуючи нерівність (7), неважко показати, що норма матриці L_1 відповідає нерівності

$$\|L_1\|\le 32\left(8\lambda_1+s\right)\|F\|^4\Big/\left[s^3\left(s-4\|F\|\right)\right]. \tag{10}$$

Для означення умови додатної визначеності матриці L_0 скористаємося локалізаційною теоремою Брауера та одним наслідком із неї [3]: характеристичні числа матриці $A=(a_{ij})$ порядку n розташовані в області, утвореній об'єднанням C_n^2 овалів Кассіні

$$|\lambda-a_{kk}||\lambda-a_{mm}|\le P_kP_m,\quad k\ne m,$$

$$P_i=\sum_{\substack{j=1\\(j\ne i)}}^{n}\left|a_{ij}\right|. \tag{11}$$

Для додатної визначеності симетричної матриці A з дійсними елементами достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$a_{kk}>0,\ a_{kk}\cdot a_{mm}>P_kP_m\ \left(k\ne m, m=\overline{1,n}\right). \tag{12}$$

Діагональні елементи матриці L_0 мають вигляд

$$l_{11}=\lambda_1-\sum_{k=2}^{n}\frac{f_{1k}^2}{\lambda_1-\lambda_k},$$

$$l_{22}=\lambda_2+\sum_{\substack{k=1\\(k\ne 2)}}^{n}\frac{f_{2k}^2}{\lambda_k-\lambda_2},$$

....

$$l_{ss}=\lambda_s+\sum_{\substack{k=1\\(k\ne s)}}^{n}\frac{f_{sk}^2}{\lambda_k-\lambda_s},$$

$$l_{s+1s+1}=\lambda_{s+1}+\sum_{\substack{k=1\\(k\ne s+1)}}^{n}\frac{f_{s+1k}^2}{\lambda_k-\lambda_{s+1}},$$

....

$$l_{n-1n-1}=\lambda_{n-1}+\sum_{\substack{k=1\\(k\ne n-1)}}^{n}\frac{f_{n-1k}^2}{\lambda_k-\lambda_{n-1}},$$

$$l_{nn}=\lambda_n+\sum_{\substack{k=1\\(k\ne n)}}^{n}\frac{f_{nk}^2}{\lambda_k-\lambda_n}. \tag{13}$$

Зауважимо, що $\sum_{r=1}^{n}l_{rr}=\sum_{p=1}^{n}\lambda_p$. Оскільки необхідною умовою стійкості системи (1) є нерівність $\sum_{p=1}^{n}\lambda_p>0$ (серед λ_p повинне бути хоча б одне значення додатним), тому $\sum_{r=1}^{n}l_{rr}>0$.

$$l_{11}>l_{22}>\ldots>l_{nn}. \tag{14}$$

Маємо $\left(\lambda_p-\lambda_{p+1}\right)^2\ge\left(\lambda_p-\lambda_{p+1}\right)s\ge s^2>2\|F\|^2$, або $\lambda_p-\frac{\|F\|^2}{s}>\lambda_{p+1}+\frac{\|F\|^2}{s}$. Окрім того, $\left|\sum_{\substack{k=1\\(k\ne p)}}^{n}\frac{f_{pk}^2}{\lambda_p-\lambda_k}\right|\le\sum_{\substack{k=1\\(k\ne p)}}^{n}\frac{f_{pk}^2}{\left|\lambda_p-\lambda_k\right|}\le s^{-1}\sum_{\substack{k=1\\(k\ne p)}}^{n}f_{pk}^2\le s^{-1}\|F\|^2$. Із цих нерівностей і витікає (14).

Величини $P_i=\sum_{\substack{j=1\\(j\ne i)}}^{n}\left|l_{ij}\right|$ відповідають нерівностям

$$P_i\le s^{-1}\|F\|^2,\ i=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Дійсно, маємо

$$P_i=\sum_{\substack{j=1\\(j\ne i)}}^{n}\left|l_{ij}\right|=\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\(j\ne i)}}^{n}\left|\sum_{\substack{k=1\\(k\ne i,j)}}\left(\frac{f_{ik}f_{kj}}{\lambda_j-\lambda_k}-\frac{f_{ik}f_{kj}}{\lambda_i-\lambda_k}\right)\right|\le$$

$$\le s^{-1}\sum_{j,k=1}^{n}\left|f_{ik}f_{kj}\right|\le s^{-1}\|F\|\sum_{k-1}^{n}\left|f_{ik}\right|\le s^{-1}\|F\|^2.$$

Згідно нерівностей (14), (15), умови додатної визначеності матриці L_0 зводяться до двох

$$\lambda_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_{nk}^2}{\lambda_k - \lambda_n} > 0,$$

$$\left(\lambda_{n-1} + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n-1)}}^{n} \frac{f_{n-1k}^2}{\lambda_k - \lambda_{n-1}} \right) \times$$
$$\times \left(\lambda_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_{nk}^2}{\lambda_k - \lambda_n} \right) - \|F\|^4 s^{-2} > 0. \quad (16)$$

Покажемо, що усі власні значення додатної визначеності матриці L_0 знаходяться з правої сторони числа $\chi > 0$:

$$\chi = \frac{1}{2} \left\{ l_{n-1n-1} + l_{nn} - \left[\left(l_{n-1n-1} - l_{nn} \right)^2 + 4\|F\|^4 s^{-2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (17)$$

Згідно оцінок (11) для $k = n-1, m = n$ отримуємо

$$\left| \lambda - l_{n-1n-1} \right| \left| \lambda - l_{nn} \right| \le P_{n-1} P_n \le \|F\|^4 s^{-2} \quad \text{або}$$

$$\lambda^2 - \left(l_{n-1n-1} + l_{nn} \right) \lambda + l_{n-1n-1} l_{nn} - \|F\|^4 s^{-2} \le 0.$$

Із останньої нерівності випливає оцінка (17).

Згідно з оцінкою за нормою матриці L_1 (10), отримуємо умову додатної визначеності матриці $L = L_0 + L_1$, $\|L_1\| < \chi$ або

$$l_{n-1n-1} + l_{nn} - \left[\left(l_{n-1n-1} - l_{nn} \right)^2 + 4\|F\|^4 s^{-2} \right]^{1/2} >$$
$$> \frac{64 \left(8\lambda_1 + s \right) \|F\|^4}{s^3 \left(s - 4\|F\| \right)}. \quad (18)$$

У (18) l_{n-1n-1} та l_{nn} визначено згідно з (13).

При виконанні нерівності (18) випливає умова додатної визначеності матриці D і, відповідно, додатна визначеність функції (2) і, як наслідок, стійкість системи (1) у випадку довільного числа від'ємних коефіцієнтів стійкості.

Список літератури

1. Агафонов С. А. К вопросу устойчивости неконсервативных систем / С. А. Агафонов // Механика твердого тела. – 1996. – № 1. – С. 47–51.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М. : Наука, 1976. – 351 с.
3. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применения / М. Пароди. – М. : Иностранная литература, 1960. – 170 с.

Одержано 22.12.2015

Костюшко И.А., Куземко В.А. Стабилизация потенциальной системы циркулярными силами

Рассматривается случай, когда линейная потенциальная система имеет произвольное число отрицательных коэффициентов устойчивости. Решается задача о стабилизации (до устойчивости) неустойчивой потенциальной системы циркулярными силами. Получены условия стойкости в терминах исходной системы.

Ключевые слова: *циркулярная система, функция Ляпунова, устойчивость системы, стабилизация неустойчивой системы, положительная определенность матрицы.*

Kostushko I., Kuzemko V. Stabilizing of the potential system by circular forces

A case is examined, when the linear potential system has an arbitrary number of negative coefficients of stability. A task about stabilizing (to stability) of the unsteady potential system circular forces is decided. The terms of firmness are got in terms of the initial system.

Key words: *circular system, Lyapunov function, stability of the system, stabilizing of the unsteady system, positive definiteness of matrix.*