

## III МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В МЕТАЛУРГІЇ ТА МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 534.1

Штанько П. К. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри кафедри механіки Національного університету «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна, e-mail: mech@zntu.edu.ua

Рягін С. Л. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри кафедри механіки Національного університету «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна, e-mail: ryaginzp@gmail.com

### КОЛИВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА З УРАХУВАННЯМ ОБЕРТАННЯ ЗЕМНОЇ КУЛІ

**Мета роботи.** Розробка із застосуванням диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду моделі математичного маятника, яка враховує обертання земної кулі навколо власної осі, та паралель, на якій встановлено маятник. З'ясування, чи впливає на модель математичного маятника положення площини коливань відносно меридіана.

**Методи дослідження.** Математичне моделювання, диференціальні рівняння Лагранжа другого роду.

**Отримані результати.** Розроблено дві розрахункові схеми математичного маятника, які враховують обертання земної кулі навколо власної осі та місце встановлення маятника, та відрізняються лише положенням площини коливань відносно меридіана. Для обох схем записано вирази для кінетичної енергії та спільний вираз для потенційної енергії. Із застосуванням диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду отримано відповідні нелінійні диференціальні рівняння. Аналіз отриманих результатів показує, що на період коливань математичного маятника впливають не тільки амплітуда, а й паралель, на якій відбуваються випробування, а також положення площини коливань відносно меридіана.

**Наукова новизна.** Із застосуванням диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду була розроблена модель математичного маятника, яка враховує обертання земної кулі навколо власної осі та місце встановлення маятника.

**Практична цінність.** Встановлено, що на період коливань математичного маятника, крім амплітуди, впливають положення площини коливань відносно меридіана, а також паралель, на якій відбуваються випробування. Це має суттєве значення, зокрема, при пошуці корисних копалин за допомогою гравіметрії, що здійснюється маятниковими приладами, коли оцінюються щонайменші зміни гравітаційної сталої.

**Ключові слова:** математичний маятник, земна куля, меридіан, паралель, припущення, диференціальне рівняння, не лінійність, площина коливань.

#### Вступ

Уточнення моделі математичного маятника дає можливість додаткового поліпшення оцінки малих змін гравітаційної сталої за періодом коливань. Актуальність цієї проблеми визначається тим, що вона пов'язана з важливим науковим і практичним завданням пошуку корисних копалин.

#### Аналіз досліджень та публікацій

Зокрема, у книзі [1] докладно викладені методи гравіметрії, що застосовують при пошуці корисних копалин, зосновані на оцінці малих змін гравітаційної сталої. Одним з найбільш поширених методів є оцінка малих змін гравітаційної сталої за періодом коливань математичного маятника. Але в цих книгах модель математичного маятника розглядається лише взагалі, виходячи з традиційних припущень, а основна увага приділяється інтерпретації отриманих результатів з точки зору гравітаційної розвідки. Така ж сама ситуація і в більш сучасному підручнику [2].

Найбільш класичним прикладом моделі математичного маятника на основі традиційних припущень можливо вважати викладену у книзі [3]. Традиційними припущеннями є наступні:

- 1) гравітаційна стала не змінюється при коливаннях;
- 2) коливання відбуваються біля плоскої поверхні Землі;
- 3) якщо амплітуду коливань неможливо вважати малою, то відновлювальний момент пропорційний синусу кута відхилення.

У сучасній вітчизняній статті [4] враховується, що коливання можуть мати велику амплітуду, але всі традиційні припущення зберігаються.

У монографії [5] диференціальні рівняння Лагранжа другого роду використовують для моделювання руху багатоланкових маятників. Але основою є ті ж самі традиційні припущення, що й у книзі [3].

У посібнику [6] враховуються вплив сили Коріоліса, що виникає при обертанні земної кулі, на коли-

вання маятника Фуко та, наближеною формулою, зміна гравітаційної сталості в залежності від паралелі. Але традиційні припущення не змінюються, рівняння Лагранжа другого роду не використовуються, тому отримані результати є неточними та частковими.

Таким чином, вищенаведені припущення є традиційними саме тому, що їх за замовченням покладають у основу моделей математичного маятника. Автори цієї статті не зустрічали моделей математичного маятника, розроблених за іншими принципами. Побудові альтернативної моделі математичного маятника присвячується ця стаття.

### Мета роботи

Метою цієї статті є розробка із застосуванням рівнянь Лагранжа другого роду на основі лише першого з традиційних припущень такої моделі математичного маятника, яка частково враховує рух земної кулі, а саме її обертання навколо власної вісі, та паралель, на якій встановлено маятник. Додатковою метою є з'ясувати, чи впливає на уточнене нелінійне диференціальне рівняння коливань положення площини коливань відносно меридіана.

### Викладення основного матеріалу та аналіз отриманих результатів

На рис. 1. наведена розрахункова схема математичного маятника  $AP$  довжиною  $l$  та масою  $m$ , площина коливань навколо осі  $PC$  якого співпадає з площиною меридіана, тобто коливання відбуваються у площині  $АСК$  (далі – варіант 1). Залишаємо чинним перше традиційне припущення: гравітаційна стала не змінюється при коливаннях. Вважаємо, що сила ваги направлена до центра  $C$  Землі, яка обертається навколо осі  $CH$  із кутовою швидкістю  $\omega$ . Тоді положення точки  $A$  визначається сферичними координатами: кутом обертання земної кулі  $\psi$ ; кутом  $\beta$ , що відповідає паралелі, на якій відбуваються гравіметричні вимірювання; радіусом Землі  $R(\beta)$  у точці  $A$ , де відбуваються вимірювання. Але при цьому кут  $\beta$  є сталим для поточного вимірювання, а радіус Землі  $R(\beta)$ , з урахуванням її реальної форми, може бути обчислений, наприклад, за формулою [7]:

$$R(\beta) = \sqrt{\frac{(a^2 \cdot \cos \beta)^2 + (b^2 \cdot \sin \beta)^2}{(a \cdot \cos \beta)^2 + (b \cdot \sin \beta)^2}}, \quad (1)$$

де велика (горизонтальна) напіввісь  $a = 6378137,0$  м;  
маленька (вертикальна) напіввісь  $b = 6356752,31$  м.

Таким чином, положення маси  $m$  визначається двома узагальненими координатами: кутом обертання земної кулі  $\psi$ ; кутом відхилення маятника  $\varphi$ . Ці координати за потреби можуть бути перетворені до декартових  $h, x, y$ .

$$h = \rho \cdot \sin \beta + \delta \cdot \cos \beta, \quad (2)$$

$$x = (\rho \cdot \cos \beta - \delta \cdot \sin \beta) \cdot \sin \psi, \quad (3)$$

$$y = (\rho \cdot \cos \beta - \delta \cdot \sin \beta) \cdot \cos \psi, \quad (4)$$

де

$$\rho = R(\beta) + l \cdot (1 - \cos \varphi), \quad (5)$$

$$\delta = l \cdot \sin \varphi. \quad (6)$$

На рис. 2 наведено розрахункову схему такого самого математичного маятника  $AP$ , площина коливань навколо осі  $PC$  якого перпендикулярна  $KK_1$ , тобто у площині, яка дотична до паралелі та перетинає центр ваги земної кулі (далі – варіант 2). У цьому випадку рівняння (2–4) набувають вигляду:

$$h = \rho \cdot \sin \beta, \quad (7)$$

$$x = \rho \cdot \cos \beta \cdot \sin \psi - \delta \cdot \cos \psi, \quad (8)$$

$$y = \rho \cdot \cos \beta \cdot \cos \psi + \delta \cdot \sin \psi. \quad (9)$$

У найбільш загальному випадку, в обох варіантах рух може бути описаний системою з двох диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду. Оскільки, згідно постановці задачі, ні на земну кулю, ані на маятник не діють зовнішні сили, ця система рівнянь набуває вигляду [8]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (11)$$

де функція Лагранжа:

$$L = T - \Pi, \quad (12)$$

$T$  – кінетична енергія системи;

$\Pi$  – потенційна енергія системи.

Однак цілком природно припустити, що рух маятника дуже мало впливає на рух земної кулі, то їм можна нехтувати. Тоді достатньо розглянути лише одне рівняння (11), вважаючи, що:

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \omega = \text{const}. \quad (13)$$

Кінетична енергія може бути обрахована:

$$T = \frac{m}{2} \cdot \left[ \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right]. \quad (14)$$

Після підстановки (2–6) у (14) та виконання необхідних перетворень, отримуємо для варіанта 1:

$$T = \frac{m}{2} \cdot \left[ \omega^2 \cdot (\rho \cdot \cos \beta - \delta \cdot \sin \beta)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cdot l^2 \right]. \quad (15)$$

Після підстановки (7–9) та (5–6) у (14) та виконання необхідних перетворень, отримуємо для варіанта 2:

$$T = \frac{m}{2} \left[ \omega^2 \cdot (r^2 \cdot \cos^2 \beta + \delta^2) + \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cdot l^2 - n \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right], \quad (16)$$

де

$$n = 2 \cdot \omega \cdot l \cdot ((R(\beta) + l) \cdot \cos \varphi - l) \cdot \cos \beta. \quad (17)$$

Виходячи із розрахункової схеми, наведеної на рис. 3, потенційна енергія для обох варіантів визначається однакою:

$$\Pi = m \cdot g \cdot R(\beta) \cdot (\sqrt{1 + 2 \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi)} - 1), \quad (18)$$

де

$$r = \frac{l}{R(\beta)} + \left( \frac{l}{R(\beta)} \right)^2. \quad (19)$$

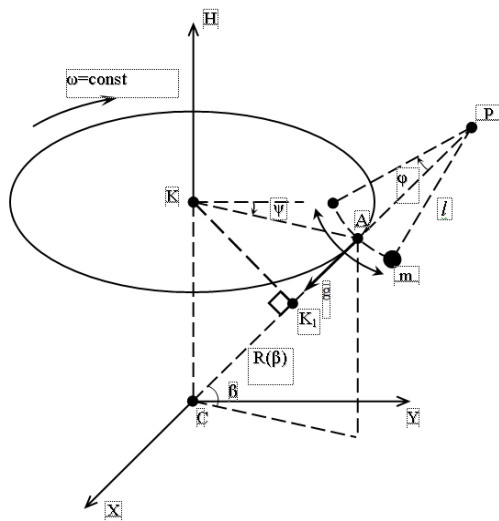


Рис. 1. Розрахункова схема математичного маятника, площина коливань якого співпадає з площиною меридіана

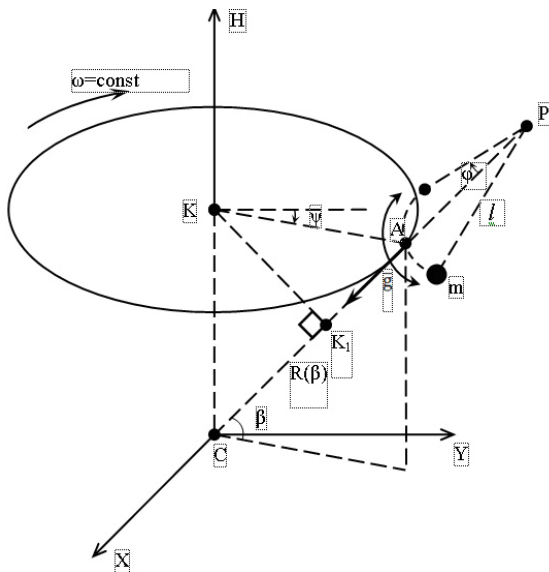


Рис. 2. Розрахункова схема математичного маятника, площина коливань якого перпендикулярна  $KK_1$

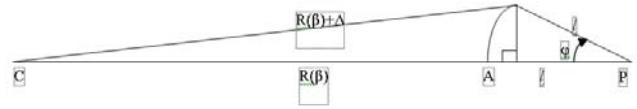


Рис. 3. Розрахункова схема для визначення потенційної енергії

Після підстановки виразів (15–19) у рівняння (11–12) та виконання необхідних перетворень отримуюмо диференціальні рівняння коливань математичного маятника. Для варіанта 1:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \omega^2 \cdot [u \cdot \cos \beta - \cos(\varphi - \beta)] \cdot \sin(\varphi - \beta) = s, \quad (20)$$

де

$$u = \frac{R(\beta)}{l} + 1, \quad (21)$$

$$s = -\frac{g}{l^2} \cdot R(\beta) \cdot \frac{r \cdot \sin \varphi}{\sqrt{1 + 2 \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi)}}. \quad (22)$$

Для варіанта 2:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \omega^2 \cdot [u \cdot \cos^2 \beta + \cos \varphi \cdot \sin^2 \beta] \cdot \sin \varphi = s. \quad (23)$$

### Висновки

Таким чином, із застосуванням диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду була розроблена модель математичного маятника, яка враховує обертання земної кулі навколо власної осі. З'ясовано, що форма відповідних нелінійних диференціальних рівнянь залежить від положення площини коливань відносно меридіана. Крім того встановлено, що на період коливань впливає не тільки їх амплітуда, а й паралель, на якій відбуваються випробування.

Диференціальні рівняння коливань, які було отримано, мають набагато більш складну нелінійну форму ніж такі, що наведено у [3]. У перспективі автори статті планують спробувати отримати їх рішення квазіаналітичним методом [9].

### Список літератури

1. Миронов В. С. Курс гравирозвідки / В. С. Миронов. – Л. : Недра, 1980. – 543 с.
2. Утемов Э. В. Гравирозвідка / Э. В. Утемов. – Казань, КГУ, 2009. – 26 с.
3. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У.Уивер. – М. : Машиностроение, 1985. – 472 с.
4. Про нелінійні коливання фізичного маятника / В. П. Ольшанський, О. І. Спольнік, В. В. Бурлака, М. В. Сліпченко // Механіка та машинобудування. – 2019. – № 1. – С. 7–14.
5. Куценко Л. М. Геометричне моделювання коливань багатоланкових маятників / Л. М. Куценко, І. Ю. Адашевська. – Харків : НТУ «ХП», 2008. – 176 с.

6. Бертяев В. Д. Теоретическая механика на базе MathCAD / В. Д. Бертяев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.

7. Earth radius [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://en.wikipedia.org/wiki/Earth\\_radius](https://en.wikipedia.org/wiki/Earth_radius).

8. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Наука, 1970. – 478 с.

9. Штанько П. К. Расчет балки переменного сечения на упругом основании квазианалитическим методом / П. К. Штанько, С. Л. Рягин // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2019. – № 1. – С. 62–66.

Одержано 21.02.2022

### **Shtanko P., Ryagin S. Oscillation of a mathematical pendulum taking into account globe rotation**

**Purpose.** Development of mathematical pendulum model which considers rotation of globe round its own axis and parallel at which pendulum has been installed with use of Lagrange's differential equations of the second kind. Checking whether oscillation plane position with respect to a meridian influences mathematical pendulum model.

**Methods of research.** Mathematical modelling, Lagrange's differential equations of the second kind.

**Results.** Two design schemes of a mathematical pendulum have been developed which consider rotation of globe round its own axis and pendulum installation place. They differ only by oscillation plane position with respect to a meridian. Formulas for kinetic energy for both schemes and the general formula for potential energy have been developed. The corresponding nonlinear differential equations are received by means of Lagrange's differential equations of the second kind. The analysis of the received results show, that oscillation period of a mathematical pendulum depends not only on amplitude but as well on parallel at which the test has been executed, and also oscillation plane position with respect to a meridian.

**Scientific novelty.** The model of a mathematical pendulum has been developed with use of Lagrange's differential equations of the second kind, which considers rotation of globe round its own axis and pendulum installation place.

**Practical value.** It's found out, that not only amplitude, but position of oscillation plane with respect to a meridian, and also a parallel at which the test has been executed influences mathematical pendulum oscillation. In particular, it has essential value when search of minerals is carried out by means of gravimetry using pendular devices, when smallest changes of a gravitational constant are estimated.

**Key words:** mathematical pendulum, globe, meridian, parallel, assumption, differential equation, nonlinearity, oscillation plane.