УДК 624.04:617-7

Штанько П. К. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры механики Национального университета «Запорізька політехніка», г. Запорожье, Украина, *e-mail: mech@zp.edu.ua*;

Рягин С. Л. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры механики Национального университета «Запорізька політехніка», г. Запорожье, Украина, *e-mail: fox@student.su*;

Гелетий И. А. студент Национального университета «Запорізька політехніка», г. Запорожье, Украина, *e-mail: Gelety.ivan@gmail.com;*

Кононенко А. В. студент Национального университета «Запорізька політехніка», г. Запорожье, Украина, *e-mail: andrju3952@gmail.com*

РАСЧЕТ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ С УЧЕТОМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

***Цель работы**. Совершенствование квазианалитического метода решения нелинейных дифференциальных уравнений и его апробация применительно к балкам переменного сечения на упругом основании с двумя коэффициентами постели.*

***Методы исследования**. К системе линейных алгебраических уравнений, получающейся после подстановки в нелинейное дифференциальное уравнение аппроксимирующей функции с постоянными коэффициентами (например – степенной) и задания набора фиксированных значений переменной, граничные условия добавляются в виде необходимого числа соответственно преобразованных уравнений. В случае последующего аналитического решения общее количество уравнений должно соответствовать количеству постоянных коэффициентов.*

***Полученные результаты**. В ходе апробации была определена упругая линия трапециевидной бетонной балки с прямоугольным сечением переменной высоты на упругом основании с двумя коэффициентами постели. Усредненная погрешность решения составила 0,06 %. Были исследованы распределения по длине балки изгибающих моментов и нормальных напряжений.*

***Научная новизна.** Авторам не встречался в литературных источниках такой метод решения нелинейных дифференциальных уравнений.*

***Практическая ценность.** Предложенный квазианалитический метод с реализованным учетом граничных условий может быть использован для решения дифференциальных уравнений любого порядка с нелинейностями различного типа, в том числе – при расчетах балок переменного сечения на упругом основании.*

***Ключевые слова**: балка переменного сечения, упругое основание, нелинейное дифференциальное уравнение, квазианалитический метод, аппроксимация, граничные условия, система линейных алгебраических уравнений, приближенное решение, погрешность.*

Введение

Точность математического моделирования является одним из основных факторов, определяю-щих будущую конкурентоспособность объектов техники. Это обуславливает актуальность и практическую ценность совершенствования методов решения нелинейных диференциальных уравнений, встречающихся в технических расчетах, в частности, связанных с расчетом балок переменного сечения на упругом основании.

Анализ публикаций

В источнике [1] приведено базовое дифференциальное уравнение, используемое для расчета деформации балки постоянного сечения, покоящейся на упругом основании с двумя коэффициентами постели. В случае балки переменного сечения это дифференциальное уравнение становится нелинейным:

$$E \cdot I(x) \cdot \frac{d^4 v}{dx^4} - 2 \cdot t \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + k \cdot v = q(x)\,, \tag{1}$$

где v – прогиб балки;

$E{\cdot}I(x)$ – переменная жесткость поперечного сечения балки;

k, t – соответственно первый и второй коэффициенты постели;

$q(x)$ – распределенная нагрузка.

В статье [2] авторами был предложен и применен для решения уравнения (1) универсальный квазианалитический метод решения нелинейных дифференциальных уравнений. Согласно метода, искомую функцию аппроксимируем некоторой известной функцией с постоянными коэффициентами. После

DOI 10.15588/1607-6885-2021-2-12

подстановки функции в нелинейное дифференциальное уравнение задача сводится к аналитическому или численному нахождению таких значений постоянных коэффициентов, при которых оценка разницы между правой и левой частями дифференциального уравнения будет минимальной при всех возможных значениях переменной. Для решения уравнения (1) была использована аппроксимация степенной функцией.

Однако в статье [2] не был рассмотрен учет граничных условий.

Цель работы

Целью данной статьи является рассмотрение учета граничных условий путем добавления к системе соответствующих линейных алгебраических уравнений при определении коэффициентов аппроксимирующей функции, а также апробация усовершенствованного таким образом квазианалитического метода решения нелинейных дифференциальных уравнений применительно к расчету балок переменного сечения на упругом основании с двумя коэффициентами постели.

Метод исследования

В качестве объекта расчета была выбрана трапециевидная бетонная балка длиной L = 6 м с квадратным начальным поперечным сечением размерами b_0=0,6 м, h_0=0,6 м на левом крае (рис. 1). Высота поперечного сечения изменяется по закону:

$$h = h_0 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot x / L)\ , \qquad (2)$$

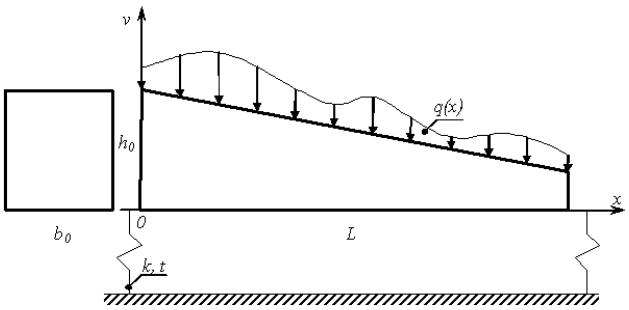

Рис. 1. Расчетная схема балки переменного сечения

Модуль Юнга балки: $E = 2 \cdot 10^{10}$ Па, первый и второй коэффициенты постели соответственно: k = 145,8·10^5 Па, t = 189,6·10^5 Н. Распределенная нагрузка описывается законом:

$$q(x) = q_0 \cdot \sin(\pi \cdot x / L)\ , \qquad (3)$$

где q_0 = 20кН/м. Таким образом, нагрузка является симметричной и действует преимущественно посередине балки.

Тогда осевой момент инерции сечения, с учетом (2), определяется функцией:

$$I(x) = \frac{b_0 \cdot h_0^3}{12} \cdot \left(1 - \frac{x}{2 \cdot L}\right)^3 . \qquad (4)$$

Упругая линия балки описывается нелинейным дифференциальным уравнением (1). Поскольку в данном случае, в отличие от статьи [2], нахождение постоянных коэффициентов было решено осуществлять только аналитически, для аппроксимации искомого прогиба v была выбрана степенная функция:

$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \\ + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 + a_6 \cdot x^6 + a_7 \cdot x^7 . \qquad (5)$$

Ее производные имеют вид:

$$\frac{du}{dx} = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + \\ + 5 \cdot a_5 \cdot x^4 + 6 \cdot a_6 \cdot x^5 + 7 \cdot a_7 \cdot x^6 , \qquad (6)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + 12 \cdot a_4 \cdot x^2 + \\ + 20 \cdot a_5 \cdot x^3 + 30 \cdot a_6 \cdot x^4 + 42 \cdot a_7 \cdot x^5 , \qquad (7)$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 6 \cdot a_3 + 24 \cdot a_4 \cdot x + 60 \cdot a_5 \cdot x^2 + \\ + 120 \cdot a_6 \cdot x^3 + 210 \cdot a_7 \cdot x^4 , \qquad (8)$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} = 24 \cdot a_4 + 120 \cdot a_5 \cdot x + \\ + 360 \cdot a_6 \cdot x^2 + 840 \cdot a_7 \cdot x^3 . \qquad (9)$$

Подстановка уравнений (5), (6), (7), (8), (9) в уравнения (1) после простых преобразований дает уравнение:

$$c_7 \cdot a_7 + c_6 \cdot a_6 + c_5 \cdot a_5 + c_4 \cdot a_4 + \\ + c_3 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_1 + c_0 \cdot a_0 = q(x), \qquad (10)$$

где

$$c_7 = 840 \cdot x^3 \cdot E \cdot I(x) - 84 \cdot t \cdot x^5 + k \cdot x^7 , \qquad (11)$$

$$c_6 = 360 \cdot x^2 \cdot E \cdot I(x) - 60 \cdot t \cdot x^4 + k \cdot x^6 , \qquad (12)$$

$$c_5 = 120 \cdot x \cdot E \cdot I(x) - 40 \cdot t \cdot x^3 + k \cdot x^5 , \qquad (13)$$

$$c_4 = 24 \cdot E \cdot I(x) - 24 \cdot t \cdot x^2 + k \cdot x^4 , \qquad (14)$$

$$c_3 = -12 \cdot t \cdot x + k \cdot x^3 , \qquad (15)$$

$$c_1 = k \cdot x , \qquad (16)$$

$$c_0 = k . \qquad (17)$$

Здесь дополнительно могут быть учтены граничные условия. В данном случае, граничными условиями является равность нулю изгибающего момента на обоих концах балки. С учетом уравнения [1]:

$$M = -E \cdot I(x) \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}, \qquad (18)$$

из уравнения (7) получаем соответственно при $x = 0$ и $x = L$:

$$a_2 = 0, \qquad (19)$$

$$a_3 \cdot L \cdot 6 + 12 \cdot a_4 \cdot L^2 + 20 \cdot a_5 \cdot L^3 + $$
$$+ 30 \cdot a_6 \cdot L^4 + 42 \cdot a_7 \cdot L^5 = 0. \qquad (20)$$

Таким образом, к системе линейных алгебраических уравнений, формируемой на основе формулы (10), граничные условия добавляются в форме соответствующим образом преобразованных уравнений, в данном случае – (19), (20). В соответствии с [2], дальнейшее решение может быть получено численной оптимизацией, приближенным аналитическим способом или комбинированным способом. В отличие от [2], где решения находились комбинированным способом, в данном случае было решено для сравнения использовать приближенный аналитический способ, что предполагает равное суммарное количество линейных алгебраических уравнений и неизвестных постоянных коэффициентов.

Уравнение (19) было заранее учтено в формуле (10).

Для нахождения оставшихся семи неизвестных постоянных коэффициентов a_0, a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 была сформирована система семи линейных алгебраических уравнений из уравнения (10) при шести значениях $x=\{0;\ L/5;\ 2L/5;\ 3L/5;\ 4L/5;\ L\}$, с учетом (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (3), (4), и уравнения (20).

Решение этой системы линейных алгебраических уравнений было получено с помощью стандартной процедуры. С учетом (19), искомые коэффициенты уравнения (5) составляют: $a_0 = 4{,}03172117 \cdot 10^{-5}$, $a_1 = -3{,}35704081 \cdot 10^{-4}$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1{,}41111632 \cdot 10^{-5}$, $a_4 = -1{,}13392158 \cdot 10^{-7}$, $a_5 = -9{,}12593131 \cdot 10^{-8}$, $a_6 = -1{,}17496141 \cdot 10^{-8}$, $a_7 = 1{,}20042367 \cdot 10^{-9}$.

Усредненная погрешность определялась так же, как и в статье [2]: как умноженное на 100% отношение суммы модулей разности между значениями правой и аппроксимированной левой частей уравнения (1) в многих точках по длине балки к сумме модулей значений правой части того же уравнения в тех же точках балки. Точки брались с постоянным шагом 0,1 м (всего 61 точка). Расчет показал, что в данном случае усредненная погрешность составила 0,06 %.

Результаты исследований и их обсуждение

Форма упругой линии трапециевидной балки, являющейся объектом расчета, приведена на рис. 2. На рис. 3 показано распределение изгибающего момента, пересчитанного по уравнению (18), по длине той же балки. Распределение по длине балки нормальных напряжений, определенных по известным формулам с учетом переменной высоты поперечного сечения, показано на рис. 4.

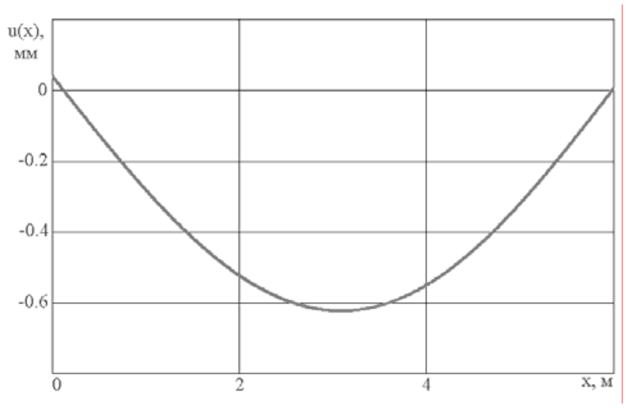

Рис. 2. Упругая линия балки переменного сечения

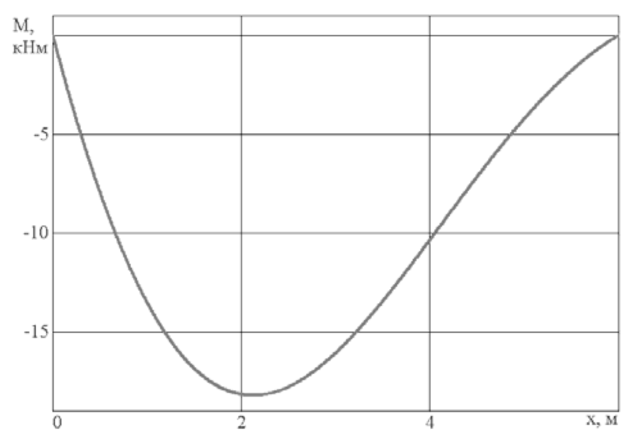

Рис. 3. Распределение изгибающего момента по длине балки переменного сечения

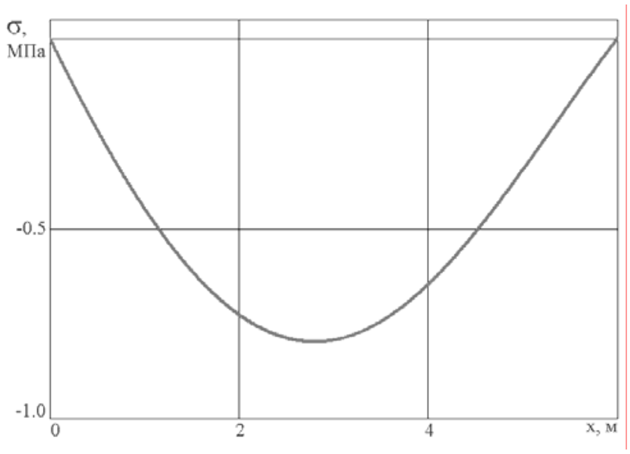

Рис. 4. Распределение нормальных напряжений по длине балки переменного сечения

Из анализа полученных результатов видно, что формы полученных зависимостей, с учетом ее трапециевидной формы балки, в целом соответствуют заданной нагрузке.

Из рис. 3 видно, что распределение изгибающего момента по длине балки соответствует заданным граничным условиям.

Выводы

Таким образом, в предложенном квазианалитическом методе решения нелинейных дифференциальных уравнений граничные условия могут быть учтены путем добавления к системе линейных алгебраических уравнений необходимого числа соответственно преобразованных уравнений. Апробация, выполненная применительно к расчету балок переменного сечения на упругом основании с двумя коэффициентами постели, подтверждает правильность такого подхода. В перспективе авторы планируют сравнить усредненную погрешность при определении значений постоянных коэффициентов аналитическим и численным способом.

Список литературы

1. Власов В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 491 с.

2. Штанько П. К. Расчет балки переменного сечения на упругом основании квазианалитическим методом / Штанько П. К. Рягин С. Л. // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2019. – № 1. – С. 62–66.

Одержано 25.03.2021

Штанько П. К., Рягін С. Л., Гелетій І. А., Кононенко А. В. Розрахунок балки змінного перерізу на пружній основі квазіаналітичним методом з урахуванням граничних умов

Мета роботи. *Удосконалення квазіаналітичного методу рішення нелінійних диференційних рівнянь та його апробація стосовно балок змінного перерізу на пружній основі з двома коефіцієнтами постелі.*

Методи досліджень. *До рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що утворюється після підстановки у нелінійне диференційне рівняння апроксимуючої функції з постійними коефіцієнтами (наприклад – степеневої) та задання набору фіксованих значень змінної, граничні умови додаються у вигляді необхідної кількості відповідним чином перетворених рівнянь. У випадку подальшого аналітичного вирішення загальна кількість рівнянь має відповідати кількості постійних коефіцієнтів.*

Отримані результати. *У ході апробації була визначена пружна лінія трапецієподібної бетонної балки з прямокутним перерізом змінної висоти на пружній основі з двома коефіцієнтами постелі. Усереднена похибка рішення склала 0,06 %. Було досліджено розподіли по довжині балки згинальних моментів та нормальних напружень.*

Наукова новизна. *Автори не зустрічали у літературних джерелах такий метод рішення нелінійних диференційних рівнянь.*

Практична цінність. *Запропонований квазіаналітичний метод з реалізованим урахуванням граничних умов може бути використано для рішення диференційних рівнянь будь-якого порядку з нелінійностями різного типу, у тому числі – при розрахунках балок змінного перерізу на пружній основі.*

Ключові слова*: балка змінного перерізу, пружна основа, нелінійне диференційне рівняння, квазіаналітичний метод, апроксимація, граничні умови, система лінійних алгебраїчних рівнянь, наближене рішення, похибка.*

Shtanko P., Ryagin S., Geletiy I., Kononenko A. Design of a beam of variable cross-section on the elastic base by the quasi-analytical method considering boundary conditions

Purpose. *Improvement of the quasi-analytical method of nonlinear differential equation solution and its approbation with reference to beams of variable cross-section on the elastic base with two base factors.*

Research methods. *Boundary conditions in the form of required number of correspondently transformed equations are added to the system of the linear algebraic equations which results from substitution of approximating function with constant factors (for example – power function) in the nonlinear differential equation and fixation of a set of variable values. The total number of the equations have to correspond to quantity of constant factors if the further solution will be carried out by an analytical method.*

Results. *Deflection diagram of a trapezoid concrete beam with rectangular cross-section of variable height on the elastic base with two base factors has been calculated during approbation. Average solution error was equal to 0.06%. Distributions of the bending moments and normal stresses along the beam have been researched.*

Scientific novelty. *The authors did not meet in literature such method of nonlinear differential equation solution.*

Practical value. *The quasi-analytical method with realised consideration of boundary conditions that has been offered can be used for solution of differential equations of any order with various types of nonlinearity, including calculations of beams of variable cross-section on the elastic base.*

Key words: *beam of variable cross-section, elastic base, nonlinear differential equation, quasi-analytical method, approximation, boundary conditions, system of the linear algebraic equations, approximate solution, error.*