

УДК 539.371

Канд. фіз.-мат. наук Левчук С. А., Хмельницький А. А.

Запорізький національний університет, м. Запоріжжя

## ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЦЬ ТИПУ ГРІНА ДЛЯ РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ

**Мета роботи.** Розрахувати напружено-деформований стан пологих оболонок з отворами за допомогою спеціально побудованих матриць типу Гріна.

**Методи дослідження.** Апарати подвійних тригонометричних рядів Фур'є інтегральних рівнянь Фредгольма, матриць типу Гріна.

**Отримані результати.** Було розглянуто статичне деформування пологої оболонки з двома круговими отворами з виконанням умов Нав'є на контурі, розташованому на деякій відстані від зовнішньої межі оболонки, за умови, що на межі контуру отвору задано умови жорсткого затиснення. Аналізуючи отримані результати, можна відзначити, що як максимальні нормальні, так і максимальні дотичні напруження концентруються не тільки біля отворів, чого і треба було очікувати, оскільки на їх межах обрано умови жорсткого затиснення, а і в зоні, яка знаходиться посередині між двома отворами. Найменша ж концентрація згаданих вище напружень спостерігається біля лінії, на якій виконані умови Нав'є.

**Наукова новизна.** Метод розрахунку пологих оболонок з отворами, що був розроблений раніше, узагальнено на випадок, коли умови Нав'є виконано не на зовнішньому контурі пологої оболонки, а на деякій відстані від нього.

**Практичне значення.** Досліджувана задача моделює явища, які відбуваються, зокрема, при деформуванні елементів вулканізаційного обладнання. Одержані результати дозволяють виявити особливості роботи елементів конструкції складної структури і, зрештою, підвищити її ефективність шляхом оптимізації параметрів складників.

**Ключові слова:** полого оболонка з отвором, напружено-деформований стан, матриця типу Гріна, щільність потенціалу.

### Вступ

Запропонований у роботах [1–3] спосіб побудови матриць типу Гріна задач теорії пологих та складених оболонок дозволяє будувати ефективні алгоритми розрахунку статичного деформування різних об'єктів складної структури. У цій роботі згаданий вище метод побудови реалізується на прикладах визначення характеристик напружено-деформованого стану пологих оболонок з отворами. Попереднє розв'язання цієї проблеми було започатковано у роботах [1–7]. У цій статті метод розрахунку пологих оболонок з отворами, що був викладений у [1], узагальнено на випадок, коли умови Нав'є виконано не на зовнішньому контурі пологої оболонки, а на деякій відстані від нього. На прикладі оболонки з двома круговими отворами, при умовах Нав'є на деякій відстані від контуру оболонки, продемонстровано ефективність вказаного вище підходу. Досліджувано у роботі задача моделює явища, які відбуваються, зокрема, при деформуванні елементів вулканізаційного обладнання. Одержані результати дозволяють виявити особливості роботи елементів складної структури і, врешті, підвищити її ефективність шляхом оптимізації параметрів складових частин.

### Матеріали та методика досліджень

Нехай мова йде про побудову матриці Гріна задачі про визначення статичного деформування пологих оболонок з отворами.

Система диференціальних рівнянь у переміщеннях, що описує пружну рівновагу пологої оболонки, має вигляд [8]:

$$\frac{1-\nu}{2} \Delta U_1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) + (k_1 + \nu k_2) \frac{\partial W}{\partial x_1} = X_1,$$

$$\frac{1-\nu}{2} \Delta U_2 + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) + (k_2 + \nu k_1) \frac{\partial W}{\partial x_2} = X_2,$$

$$(k_1 + \nu k_2) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + (k_2 + \nu k_1) \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \left( \lambda^4 + \frac{h^2}{12} \Delta \Delta \right) W = Z, \quad (1)$$

де  $x_1, x_2$  – криволінійні координати точки серединної поверхні оболонки;  $k_1, k_2$  – головні кривини;  $U_1 = U_1(x), U_2 = U_2(x), W = W(x)$  – компоненти вектору зміщень,  $X_1, X_2, Z$  – праві частини, що враховують зовнішнє поверхневе навантаження;  $h$  – товщина

оболонки;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  –

оператор Лапласа;  $\lambda^4 = k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2$ .

Праві частини системи  $X_1, X_2, Z$  можуть бути подані через складові інтенсивності зовнішнього поверхневого навантаження  $q_{x_1}, q_{x_2}, q_z$  так [2]:

$$X_1 = -\frac{1-\nu^2}{Eh} q_{x_1}, \quad X_2 = -\frac{1-\nu^2}{Eh} q_{x_2}, \quad Z = \frac{1-\nu^2}{Eh} q_z, \quad (2)$$

де  $E$  – модуль Юнга.

Крайові умови на контурі  $L$  отвору можуть мати вигляд:

$$U_1|_L = \Psi_1, \quad U_2|_L = \Psi_2, \quad W_L|_L = \Psi_3, \quad \frac{\partial W}{\partial n}|_L = \Psi_4, \quad (3)$$

де  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$  – деякі функції.

**Теоретичні результати та їх аналіз.** Розв'язок системи будемо відшукувати у вигляді подвійних тригонометричних рядів [1]:

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \sum_{m,n} U_{mn}^1 \sin \frac{m\pi x_1}{2\alpha_1} \cos \frac{n\pi x_2}{2\alpha_2}, \\ U_2(x) &= \sum_{m,n} U_{mn}^2 \cos \frac{m\pi x_1}{2\alpha_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2\alpha_2}, \\ W(x) &= \sum_{m,n} W_{mn} \cos \frac{m\pi x_1}{2\alpha_1} \cos \frac{n\pi x_2}{2\alpha_2}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $2\alpha_1, 2\alpha_2$  – геометричні розміри оболонки.

Такий вибір апроксимуючих функцій обумовлений тим, що якщо у виразах (4) покласти гармоніки  $m, n = 1, 3, \dots$ , то на контурі оболонки будуть виконані умови Нав'є.

У відповідні ряди Фур'є розкладемо також і праві частини системи (1):

$$\begin{aligned} X_1(x) &= \sum_{m,n} X_{mn}^1 \sin \frac{m\pi x_1}{2\alpha_1} \cos \frac{n\pi x_2}{2\alpha_2}, \\ X_2(x) &= \sum_{m,n} X_{mn}^2 \cos \frac{m\pi x_1}{2\alpha_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2\alpha_2}, \\ Z(x) &= \sum_{m,n} Z_{mn} \cos \frac{m\pi x_1}{2\alpha_1} \cos \frac{n\pi x_2}{2\alpha_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Підставляючи (4), (5) у (1), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $U_{mn}^1,$

$U_{mn}^2, W_{mn}$ . Розв'язок цієї системи дозволяє побудувати матрицю типу Гріна для розглянутої задачі (1), (3) (більш докладно див. [1]).

Використовуючи далі отриману матрицю типу Гріна, одержимо такий метод розрахунку.

Розв'язок задачі (1), (3) будемо шукати у вигляді [1]:

$$V(x) = V^0(x) + V^*(x),$$

де

$$V(x) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ W \end{pmatrix}, \quad V^0(x) = \begin{pmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ W^0 \end{pmatrix},$$

$V^0(x) = \iint_{\Omega} G(x, \xi) F(\xi) d\xi$  – частинний розв'язок системи (1),

$$V^*(x) = \int_L Q(x, \xi) \mu(\xi) d\xi$$

$$Q(x, \xi) = \begin{pmatrix} G^{11} & G^{12} & G^{13} & \frac{\partial G^{13}}{\partial n_1} \\ G^{21} & G^{22} & G^{23} & \frac{\partial G^{23}}{\partial n_1} \\ G^{31} & G^{32} & G^{33} & \frac{\partial G^{33}}{\partial n_1} \end{pmatrix};$$

$$G(x, \xi) = (G^{ij})_{i,j=1,2,3}; \quad F(\xi) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Z \end{pmatrix}; \quad (7)$$

$n_1 = n_1(\xi_1, \xi_2)$  – зовнішня нормаль до контуру отвору

$L$ ;  $G^{ij} = G^{ij}(x, \xi)$  – елементи побудованої в [1] матриці типу Гріна.

При цьому будемо мати:

$$G(x, \xi) = \sum_{m,n} T_{mn}(x) G_{mn} T_{mn}(\xi),$$

де

$$G_{mn} = (G_{mn}^{ij})_{i,j=1,2,3};$$

$$T_{mn}(x) = \begin{pmatrix} \sin \frac{m\pi x_1}{2\alpha_1} \cos \frac{n\pi x_2}{2\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{m\pi x_1}{2\alpha_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{m\pi x_1}{2\alpha_1} \cos \frac{n\pi x_2}{2\alpha_2} \end{pmatrix};$$

$$G_{mn}^{11} = \frac{\delta_m \delta_n}{\alpha_1 \alpha_2} \left( -\frac{12}{h^2} \frac{m^2 \pi^2}{4\alpha_1^2} \frac{P_{mn}^2}{\Delta_{mn}^2} - \frac{1}{\Delta_{mn}} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{n^2 \pi^2}{4\alpha_2^2} \frac{1}{\Delta_{mn}^2} \right);$$

$$G_{mn}^{22} = \frac{\delta_m \delta_n}{\alpha_1 \alpha_2} \left( -\frac{12}{h^2} \frac{n^2 \pi^2}{4\alpha_2^2} \frac{Q_{mn}^2}{\Delta_{mn}^2 \theta_{mn}} - \frac{1}{\Delta_{mn}} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{m^2 \pi^2}{4\alpha_1^2} \frac{1}{\Delta_{mn}^2} \right);$$

$$G_{mn}^{12} = G_{mn}^{21} = \frac{\delta_m \delta_n}{\alpha_1 \alpha_2} \left( -\frac{12}{h^2} \frac{P_{mn} Q_{mn}}{\theta_{mn}} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \frac{m\pi \pi^2}{4\alpha_1 \alpha_2 \Delta_{mn}^2};$$

$$-G_{mn}^{13} = G_{mn}^{31} = \frac{12\delta_m \delta_n}{\alpha_1 \alpha_2 h^2} \frac{m\pi}{2\alpha_1} \frac{P_{mn}}{\theta_{mn}}; \theta_{mn} = \Delta_{mn}^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} \nabla_{mn}^2;$$

$$-G_{mn}^{32} = G_{mn}^{23} = -\frac{12\delta_m \delta_n}{\alpha_1 \alpha_2 h^2} \frac{n\pi}{2\alpha_2} \frac{Q_{mn}}{\theta_{mn}}; \Delta_{mn} = \left( \frac{m\pi}{2\alpha_1} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{2\alpha_2} \right)^2;$$

$$G_{mn}^{33} = \frac{12\delta_m \delta_n}{\alpha_1 \alpha_2 h^2} \frac{\Delta_{mn}^2}{\theta_{mn}}; \nabla_{mn} = k_1 \left( \frac{n\pi}{2\alpha_2} \right)^2 + k_2 \left( \frac{m\pi}{2\alpha_1} \right)^2;$$

$$P_{mn} = (1+\nu)\nabla_{mn} + (k_1 - k_2)\Delta_{mn};$$

$$Q_{mn} = (1+\nu)\nabla_{mn} + (k_2 - k_1)\Delta_{mn};$$

$$\delta_m = \begin{cases} 1/2, & \text{при } m = 0; \\ 1, & \text{при } m > 0; \end{cases} \quad \delta_n = \begin{cases} 1/2, & \text{при } n = 0; \\ 1, & \text{при } n > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Щільність потенціалу  $\mu(\xi)$  із (1) визначається інтегральним рівнянням [3]

$$\int_L K(\eta, \xi) \mu(\xi) d\xi L = \Psi(\eta) - \tilde{V}^0(\eta), \quad (9)$$

де  $K(\eta, \xi) = \Re \left( \frac{\partial}{\partial n} \right) Q(\eta, \xi);$

$$\Re \left( \frac{\partial}{\partial n} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial n} \end{pmatrix}; \quad \mu(\xi) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix}; \quad \Psi(\eta) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{V}^0(\eta) = \begin{pmatrix} U_1^0|_L \\ U_2^0|_L \\ W^0|_L \\ \frac{\partial W^0}{\partial n}|_L \end{pmatrix};$$

$n = n(x_1, x_2)$  – зовнішня нормаль до контуру  $L$ .

Нехай як приклад контур  $L$  є еліпсом. Тоді він задається рівняннями  $\xi_1 = a \cos \varphi$   $\xi_2 = b \sin \varphi$ . Якщо розглядати напружено-деформований стан симетричний відносно координатних осей, з початком координат у центрі розглянутої оболонки, то з (9) одержимо таке інтегральне рівняння:

$$4 \int_0^{\pi/2} K(\eta(t), \xi(\varphi)) \mu(\xi(\varphi)) \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \Psi(\eta(t)) - \tilde{V}^0(\eta(t)), \quad (10)$$

яке можна апроксимувати системою лінійних алгебраїчних рівнянь за наступною схемою:

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} K(\eta(t_i), \xi(\varphi_j)) \mu(\xi(\varphi_j)) \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi_j + b^2 \cos^2 \varphi_j} = \Psi(\eta(t_i)) - \tilde{V}^0(\eta(t_i)). \quad (11)$$

Треба відзначити, що задача (10), що є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, належить, як відомо, до класу некоректно поставлених задач. В цьому випадку доцільне застосування регуляризації (за Тихоновим) для її оптимізації і розв'язання. Згадана проблема, зокрема, досліджувалася автором у роботі [9].

Розв'язок системи (11) дозволяє визначити невідомі коефіцієнти  $U_{mn}^1$ ,  $U_{mn}^2$ ,  $W_{mn}$  у виразах переміщень (4).

Інші характеристики напружено-деформованого стану можна обчислити за формулами [10]:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - k_1 W - \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} z, \quad \varepsilon_{x2} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} - k_2 W - \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} z,$$

$$\sigma_{x1} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x1} + \nu \varepsilon_{x2}),$$

$$\sigma_{x2} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x2} + \nu \varepsilon_{x1}), \quad \tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2, \quad (12)$$

де  $\varepsilon_{x1}$ ,  $\varepsilon_{x2}$  – складові лінійної деформації оболонки,  $z$  – відстань від серединної поверхні до точки оболонки, в якій обчислюються деформації і напруження,  $\sigma_{x1}$ ,  $\sigma_{x2}$  – нормальні напруження,  $\tau_{\max}$  – максимальне дотичне напруження,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  – найбільше та найменше головні напруження відповідно.

#### Обчислювальні результати та їх аналіз

Як приклад застосування викладеного вище методу розрахунку розглянемо статичне деформування пологої оболонки з двома круговими отворами з виконанням умов Нав'є на контурі, розташованому на деякій відстані від зовнішньої межі оболонки, за умови, що на межі контуру отвору  $L$  задано умови жорсткого затиснення, тобто

$$U_1|_L = 0, \quad U_2|_L = 0, \quad W|_L = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n}|_L = 0.$$

Нехай вхідні параметри мають такі значення (в безрозмірних величинах):  $\nu = 0,25$ ,  $E/q_z = -4/3 \cdot 10^7$ ,

$$2\alpha_1/h = 50, \quad 2\alpha_2/h = 25, \quad 2a/h = 2b/h = 10,$$

$$k_1 \cdot h = k_2 \cdot h = 0,01, \quad q_{x1} = q_{x2} = 0.$$

Розраховані за викладеною вище схемою характеристики напружено-деформованого стану досліджуваної пологої оболонки з отворами зображені на рис. 1–3. Пунктирною лінією на цих рисунках позначено контур оболонки (не зовнішній), на якому за допомогою виразів (4) і відповідного вибору гармонік ( $m$ ,  $n$ ) виконуються крайові умови Нав'є. Відстань від згаданого контуру до зовнішньої межі оболонки дорівнює п'яти одиницям. Така ситуація виникла в реальній конструкції, що розраховувалася на міцність. Зовнішнє нормальне навантаження діяло тільки в області, що обмежена пунктирною лінією. На пунктирній лінії виконуються умови Нав'є, а на зовнішньому контурі умови залежать від умов Нав'є на пунктирному контурі й від характеру прикладення навантажень у робочій області, проте вони не враховувалися при розрахунках. Фактично ця нависаюча ділянка не була робочою зоною і напруження й деформації там не становлять практичного інтересу. Звичайно, там виникають деякі напруження, але, зважаючи на все, вони не можуть бути істотними і суттєво впливати на загальну картину деформування. Деформації ж були апроксимовані за допомогою рядів виду (4), що фізично є цілком правдоподібним (див. рис. 1).

Аналізуючи отримані результати, можна відзначити, що як максимальні нормальні, так і максимальні дотичні напруження концентруються не тільки біля отворів, чого і треба було очікувати, оскільки на їх межах обрано умови жорсткого затиснення, а і в зоні, яка знаходиться посередині між двома отворами (див. рис. 2–3). Це можна пояснити, зокрема, сумісним впливом геометрії оболонки і обраними умовами Нав'є на лінії, що позначена пунктиром. Найменша ж концентрація згаданих вище напружень спостерігається біля лінії, позначеної пунктиром, що можна пояснити виконанням на ній умов Нав'є.

Відзначимо, що застосований спосіб розрахунку статичного деформування досліджуваного об'єкта дозволяє досягнути високої точності при утриманні певного числа гармонік ( $m$ ,  $n$ ) у виразах (4), (5). А саме точність виконання умов Нав'є на згаданому вище не зовнішньому контурі забезпечується вибором  $m, n = 1, 3, \dots, 31$ . При цьому максимальна відносна похибка обчислень не перевищує 0,8 %.



Рис. 1. Нормальні прогини

$$10 \cdot \sigma_{\max} / q_z$$

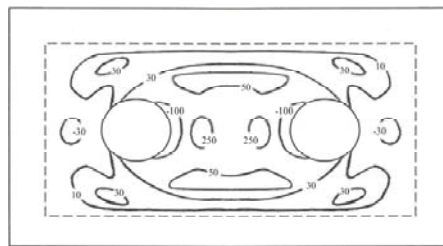


Рис. 2. Максимальні нормальні напруження

$$10 \cdot \tau_{\max} / q_z$$

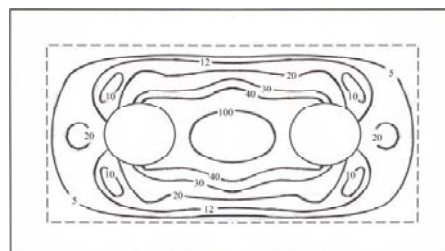


Рис. 3. Максимальні дотичні напруження

### Список літератури

1. Гавеля С. П. Решение некоторых граничных задач теории оболочек / С. П. Гавеля, Ю. А. Мельников, И. А. Давыдов. — Днепрпетровск : Изд-во ДГУ, 1971. — 53 с.
2. Гавеля С. П. Метод построения матриц типа Грина для составных оболочек / С. П. Гавеля // Докл. АН УССР. — Сер. А. — 1981. — № 9. — С. 12–17.
3. Гавеля С. П. Некоторые граничные задачи для пологих оболочек с отверстиями / С. П. Гавеля // Динамика и прочность машин. — Харьков, 1966. — Вып. 3. — С. 33–37.
4. Гавеля С. П. О вычислении матриц Грина статических задач теории пологих оболочек / С. П. Гавеля // Изв. ВУЗов, Математика. — 1980. — № 12. — С. 3–9.
5. Гавеля С. П. Периодические задачи для пологих оболочек произвольной кривизны с отверстиями / С. П. Гавеля // Докл. АН УССР. — Сер. А. — 1969. — № 8. — С. 226–229.
6. Левчук С. А. Расчет напряженно-деформированного состояния элементов сложных технических конструкций / С. А. Левчук. — Запорожье, 1997. — 24 с. — Деп. в УкрИНТЭИ 17.06.97, № 447. — Ук97.
7. Левчук С. А. Розрахунок напружено-деформованого стану пологих оболонок з отворами за допомогою матриць Гріна / С. А. Левчук // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. — 2009. — № 2. — С. 102–106.
8. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В. З. Власов. — М., 1949. — 707 с.
9. Левчук С. А. Дослідження доцільності застосування тихоновського стабілізатора до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма першого роду в задачі про розрахунок статичного деформування пологих оболонок з отворами / С. А. Левчук // Вісник Запорізького державного університету. Сер. Фізико-математичні науки. — Запоріжжя, 2005. — № 1. — С. 29–33.
10. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 2 / [под общей редакцией И. А. Биргера, Я. Г. Пановка]. — М. : Машиностроение, 1968. — 464 с.

Одержано 22.01.2019

**Левчук С.А., Хмельницький А.А. Применение матриц типа Грина для расчета напряженно-деформированного состояния пологих оболочек с отверстиями**

**Цель работы.** Рассчитать напряженно-деформированное состояние пологих оболочек с отверстиями с помощью специально построенных матриц типа Грина.

**Методы исследования.** Аппараты двойных тригонометрических рядов Фурье интегральных уравнений Фредгольма, матриц типа Грина.

**Полученные результаты.** Было рассмотрено статическое деформирование полой оболочки с двумя круговыми отверстиями с выполнением условий Навье на контуре, расположенном на некотором расстоянии от внешней границы оболочки, при условии, что на границе отверстия заданы условия жесткого защемления. Анализируя полученные результаты можно отметить, что как максимальные нормальные, так и максимальные касательные напряжения концентрируются не только возле отверстий, чего и следовало ожидать, поскольку на них выбраны условия жесткого защемления, а и в зоне, которая находится посередине между двумя отверстиями. Наименьшая же концентрация упомянутых выше напряжений наблюдается возле линии, на которой выполнены условия Навье.

**Научная новизна.** Метод расчета пологих оболочек с отверстиями, который был разработан раньше, обобщен на случай, когда условия Навье выполнены не на внешнем контуре полой оболочки, а на некотором расстоянии от него.

**Практическое значение.** Исследуемая задача моделирует явления, которые происходят, в частности, при деформировании элементов вулканизационного оборудования. Полученные результаты позволяют выявить особенности работы элементов конструкции сложной структуры и, в конечном счете, повысить ее эффективность путем оптимизации параметров составных частей.

**Ключевые слова:** полая оболочка с отверстием, напряженно-деформированное состояние, матрица типа Грина, плотность потенциала.

**Levchuk S., Khmelnytskyi A. Application of matrix of Green's type for calculation strainly-deformed state of the sloping shells with holes**

**Purpose.** Calculate the strainly-deformed state of shallow shells with holes using specially constructed Green-type matrices.

**Research methods.** Devices of double trigonometric Fourier series of Fredholm integral equations, matrices of Green type.

**Results.** The static deformation of a shallow shell with two circular holes with the fulfillment of the Navier conditions on the contour is considered. The contour is located at some distance from the outer boundary of the shell. At the border of the hole, the conditions of rigid pinching are specified. Analyzing the obtained results, it can be noted that both the maximum normal and maximum tangential stresses are concentrated not only near the holes, but also in the zone, which is located in the middle between the two holes. The lowest concentration of the above-mentioned stresses is observed near the line on which the Navier conditions are fulfilled.

**Scientific novelty.** The method of calculating shallow shells with holes, which was developed earlier, is generalized to the case when the Navier conditions are not satisfied on the outer contour of the shallow shell, but at some distance from it.

**Practical value.** The investigated task models the phenomena that occur, in particular, during the deformation of elements of the vulcanization equipment. The results obtained make it possible to clarify the features of the operation of structural elements of a complex structure and to increase its efficiency by optimizing the parameters of the component parts.

**Key words:** sloping shell with hole, strainly-deformed state, matrix of Green's type, density of potential.