

УДК 539.312

Канд. фіз.-мат. наук А. В. Пожуєв, канд. техн. наук О. М. Міхайлуца

Запорізька державна інженерна академія, м. Запоріжжя

НЕСТАЦІОНАРНА РЕАКЦІЯ ТРИШАРОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ЯКА ЗАНУРЕНА У РІДИНУ

Мета роботи. Побудувати математичну модель тришарової циліндричної оболонки із заповнювачем, яка занурена в ідеальну рідину. Вивчити картину нестационарної деформації конструкції під дією навантаження, яке прикладається у початковий момент часу до внутрішньої оболонки, а потім рухається зі сталою швидкістю у осьовому напрямку.

Методи дослідження. Розв'язок отримано шляхом сумісного застосування до кожного рівняння інтегральних перетворень Фур'є за просторовою координатою та Лапласа за часом. Для обернення інтегральних перетворень використовується алгоритм, який базується на застосуванні методу Файлона для знаходження інтегралів від функцій, які сильно осцилюють. Побудова оригіналів шуканих величин відбувалася за допомогою зміщених многочленів Лежандра.

Отримані результати. Розроблено чисельно-аналітичний алгоритм сумісного обернення двох інтегральних перетворень. Проведено велику кількість чисельних експериментів для знаходження кроку та верхньої границі інтегрування у методі Файлона. Побудовано графічні залежності, які ілюструють розподіл компонент напружено-деформованого стану у різні моменти часу.

Наукова новизна. Запропонований підхід розширює математичні методи розв'язку початково-крайових задач механіки, у яких застосовуються інтегральні перетворення. Досліджено час встановлення процесу та перехід до стаціонарної задачі.

Практична цінність. Отримані результати можуть бути використані у якості еталонних для побудови моделей тонкостінних елементів конструкцій під дією ударних хвиль у рідині, зокрема, підводних трубопроводів.

Ключові слова: циліндрична оболонка, пружний заповнювач, динамічне навантаження, осесиметрична задача.

Динамічні задачі визначення реакції нескінченної тонкостінної оболонки з заповнювачем на дію навантаження, яке рухається в осьовому напрямку, розглядалися багатьма авторами порівняно давно. Розв'язок таких задач у точній постановці, коли для заповнювача використовуються динамічні рівняння теорії пружності, а оболонка описується рівняннями типу Тимошенко знайдено у роботах [1–2]. Нестационарна реакція подібних конструкцій та перехідні процеси, які виникають безпосередньо після моменту навантаження, розглядалися у роботах [3–4].

У запропонованій роботі досліджується нестационарна реакція нескінченної тришарової циліндричної оболонки, яка занурена до ідеальної рідини, на дію осесиметричного навантаження, яке прикладено у початковий момент часу та рухається потім з постійною швидкістю. Розв'язок знайдено аналітичним методом у просторі зображень за допомогою інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа. Обернення інтегральних перетворень здійснено чисельно за допомогою методу Файлона і зміщених поліномів Лагранжа.

Розв'язок задачі зводиться до сумісного інтегрування диференціальних рівнянь руху кожної оболонки, заповнювача та рідини при нульових початкових умовах та виконанні граничних умов на усіх поверхнях контакту.

Беручи до уваги симетричну будову кожної оболонки, рівняння руху шарів можна записати у наступному вигляді:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a_k} \frac{\partial W}{\partial x} - \rho \frac{1-\nu}{2G} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{1-\nu}{2Gh} q_{xk},$$

$$\frac{\nu}{a_k} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{W}{a_k^2} + \rho \frac{1-\nu}{2G} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\frac{1-\nu}{2Gh} (q_{rk} - F_k), \quad (1)$$

де $k = 1$ відноситься до внутрішнього шару, а $k = 2$ – до зовнішнього;

q_{xk}, q_{rk} – нормальні і дотичні реакції з боку заповнювача на границі розділу з оболонкою, які знаходяться із граничних умов і характеризують вид взаємодії;

$F_1 = F(x, t)$ – інтенсивність зовнішнього навантаження;

$F_2 = F^+(x, t)$ – надлишковий тиск на зовнішню поверхню оболонки з боку рідини;

ρ, ν, G – щільність, коефіцієнт Пуассона і модуль зсуву матеріалу оболонки.

Рух заповнювача підпорядковується динамічним рівнянням теорії пружності, які у векторній формі мають вигляд:

$$(\lambda_c + 2\mu_c) \text{grad div } \bar{U} - \mu_c \text{rot rot } \bar{U} = \rho_c \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2},$$

$$\lambda_c = \frac{2\nu_c G_c}{1-2\nu_c}, \quad \mu_c = G_c.$$

Осесиметричний рух рідини, яка ідеально стискається, задається таким хвильовим рівнянням:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (3)$$

де c_1 – швидкість звуку у рідині.

За умови малої товщини оболонок приймаємо, що заповнювач та рідина контактують вздовж серединних поверхонь оболонок. У цьому випадку граничні умови для ковзкого контакту між оболонками і заповнювачем будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a_1 \quad U_r = W, \quad \sigma_{rx} = 0, \quad \sigma_{rr} = -q_{r1} \\ \text{при } r = a_2 \quad \sigma_{rr} = q_{r2}. \end{aligned} \quad (4)$$

На зовнішній поверхні оболонки мають місце наступні умови:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a_2 \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \\ F^+(x, t) = -\rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5)$$

де ρ_1 – масова щільність рідини.

Перейдемо до безрозмірних величин за допомогою наступних формул:

$$\{U^*, W^*, x^*, r^*\} = \frac{\{U, W, x, r\}}{a_2}, \quad \{U_x^*, U_r^*\} = \frac{\{U_x, U_r\}}{a_2},$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \rho_1^* = \frac{\rho_1}{\rho_c}, \quad \gamma = \frac{G}{G_c}, \quad c_s^2 = \frac{G_c}{\rho_c}, \quad c^* = \frac{c}{c_s},$$

$$\beta_1 = \frac{h}{a_2}, \quad \varepsilon_k = \frac{a_k}{a_2}, \quad \tau = \frac{c_s t}{a_2}$$

та застосуємо до рівнянь руху оболонки (1) інтегральні перетворення Лапласа за часом і Фур'є за осовою координатою. В результаті вказаних дій рівняння набудуть вигляду:

$$\frac{Q_{xk}}{G_c} = \frac{2\gamma\beta_1}{1-\nu} \left[\xi^2 \left(1 + \rho^* \frac{1-\nu}{2\gamma} p^2 \right) U^* - i\xi \frac{\nu}{\varepsilon_k} W^* \right],$$

$$\frac{Q_{rk}}{G_c} = \frac{F_k}{G_c} - \frac{2\gamma\beta_1}{1-\nu} \left[i\xi \frac{\nu}{\varepsilon_k} U^* + \left(\frac{\beta_1^2 \xi^4}{12} + \frac{1}{\varepsilon_k^2} + \rho^* \frac{1-\nu}{2\gamma} p^2 \right) W^* \right]. \quad (6)$$

Враховуючи те, що при ковзкому контакті дотична реакція заповнювача дорівнює нулю, знаходимо залежність нормальної складової реакції від радіального переміщення:

$$\frac{Q_{rk}}{G_c} = \frac{F_k}{G_c} - \frac{2\gamma\beta_1}{1-\nu} \left[\frac{\beta_1^2 \xi^4}{12} + \rho^* \frac{1-\nu}{2\gamma} p^2 + \frac{1}{\varepsilon_k^2} \left(1 + \frac{\nu^2}{1 + \rho^* \frac{1-\nu}{2\gamma} p^2} \right) \right] W^*. \quad (7)$$

Застосуємо ці самі перетворення до рівняння руху рідини (2):

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{d\varphi}{dr^*} - \left(\xi^2 + \frac{c_s^2}{c_1^2} p^2 \right) \varphi = 0. \quad (8)$$

Умови контакту оболонки з рідиною набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a_2 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r^*} = c_s p a_2 W^* \\ F^+(x, p) = -\rho_1 \frac{c_s}{a_2} p \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Будемо розглядати хвилю тиску меншу, ніж швидкість звуку у рідині. У цьому випадку розв'язок хвильового рівняння (8) з урахуванням затухання збуджень на нескінченості набудуть такого вигляду:

$$\varphi(r^*, \xi) = A(\xi) K_0(\lambda r^*), \quad \lambda = \sqrt{\xi^2 + \frac{c_s^2}{c_1^2} p^2}, \quad (10)$$

де $K_0(z)$ – модифікована функція Бесселя.

Підставимо розв'язок (10) у граничні умови (9) та знайдемо зв'язок між надлишковим тиском та нормальним переміщенням зовнішньої оболонки

$$F^+(\xi) = \frac{\rho_1 c_s^2 p^2}{\lambda} \frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)} W(\xi). \quad (11)$$

Для інтегрування руху заповнювача вводимо у просторі зображень дві потенціальні функції за наступними формулами

$$U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad U_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial r}. \quad (12)$$

Застосовуючи до потенціальних функцій перетворення Фур'є, підставимо ці вирази для переміщень до перетворених рівнянь (2). Отримаємо видозмінені хвильові рівняння для визначення функцій Φ, Ψ

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{d\Phi}{dr^*} - \left(\xi^2 + \frac{c_s^2}{c_p^2} p^2 \right) \Phi = 0, \\ \frac{d^2 \Psi}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{d\Psi}{dr^*} - (\xi^2 + p^2) \Psi = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

де c_p, c_s – швидкості розповсюдження хвиль розтяг-стиску та зсуву у заповнювачі.

Загальні розв'язки рівнянь (13) запишуться так

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, r^*) = C_1(\xi) K_0(\lambda_p r^*) + C_2(\xi) I_0(\lambda_p r^*), \\ \Psi(\xi, r^*) = C_3(\xi) K_0(\lambda_s r^*) + C_4(\xi) I_0(\lambda_s r^*), \end{aligned} \quad (14)$$

де $\lambda_p = \sqrt{\xi^2 + \theta p^2}$, $\lambda_s = \sqrt{\xi^2 + p^2}$, $\theta = \frac{c_s^2}{c_p^2} = \frac{1-2\nu_c}{2(1-\nu_c)}$.

Підставимо знайдені розв'язки (14) у вирази (12) та знаходимо компоненти переміщення. Далі визначаємо за допомогою закону Гука компоненти напружень та задовольняючи граничні умови (4), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $C_1 \div C_4$.

$$C_1^* = C_1 K_1(\lambda_p) \frac{G_c}{F_1}, \quad C_2^* = C_2 I_1(\lambda_p) \frac{G_c}{F_1}, \quad (15)$$

$$C_3^* = i C_3 K_1(\lambda_s) \frac{G_c}{F_1}, \quad C_4^* = i C_4 I_1(\lambda_s) \frac{G_c}{F_1}.$$

Після цієї заміни коефіцієнти системи рівнянь набудуть вигляду

$$a_{11} = 2\xi\lambda_p, \quad a_{12} = -2\xi\lambda_p, \quad a_{13} = -n_1, \quad a_{14} = n_1,$$

$$a_{21} = 2\xi\lambda_p s_1, \quad a_{22} = -2\xi\lambda_p s_4, \quad a_{23} = -n_1 s_7, \quad a_{24} = n_1 s_{10},$$

$$a_{31} = n_1 s_3 + \lambda_p t_2, \quad a_{32} = n_1 s_6 - \lambda_p t_2,$$

$$a_{33} = -\xi(2\lambda_s^2 s_9 + \lambda_s t_2), \quad a_{34} = -\xi(2\lambda_s^2 s_{12} - \lambda_s t_2),$$

$$a_{41} = n_1 s_2 + \lambda_p t_1 s_1, \quad a_{42} = n_1 s_5 - \lambda_p t_1 s_4,$$

$$a_{43} = -\xi(2\lambda_s^2 s_8 + \lambda_s t_1 s_7), \quad a_{44} = -\xi(2\lambda_s^2 s_{11} - \lambda_s t_1 s_{10}),$$

$$n_1 = (\xi^2 + \lambda_s^2) \lambda_s, \quad n_2 = \frac{1-\nu}{2\gamma},$$

$$n_3 = \frac{\beta_1}{n_2} \left[\frac{\beta_1^2 \xi^4}{12} + \rho^* n_2 p^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2} \left(1 + \frac{\nu^2}{1 + \rho^* n_2 p^2} \right) \right],$$

$$n_4 = -\frac{p^2}{\lambda \rho_1^*} \frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)} + \frac{\beta_1}{n_2} \left[\frac{\beta_1^2 \xi^4}{12} + \rho^* n_2 p^2 + 1 + \frac{\nu^2}{1 + \rho^* n_2 p^2} \right],$$

$$s_1 = \frac{K_1(\lambda_p \varepsilon_1)}{K_1(\lambda_p)}, \quad s_2 = \frac{K_0(\lambda_p \varepsilon_1)}{K_1(\lambda_p)}, \quad s_3 = \frac{K_0(\lambda_p)}{K_1(\lambda_p)}, \quad (16)$$

де $s_4 - s_6$ отримуємо з $s_1 - s_3$ заміною функцій K_n функціями I_n , $s_7 - s_9$ - з $s_1 - s_3$, а $s_{10} - s_{12}$ - з $s_4 - s_6$ шляхом заміни λ_p на λ_s . Права частина системи нульова, окрім останнього елемента, який дорівнює -1.

Після знаходження невідомих коефіцієнтів методом Гауса з вибором провідного елемента, отримуємо формули для знаходження трансформант переміщення та напруження у заповнювачі. Наприклад, для радіальних переміщень і напружень у довільній точці отримуємо:

$$U_r^* = \left(-C_1^* \lambda_p s_{14} + C_2^* \lambda_p s_{16} + \xi C_3^* \lambda_s s_{18} - \xi C_4^* \lambda_s s_{20} \right) \frac{F_1}{G_c},$$

$$\sigma_{rr} = \left[\left(n_1 s_{13} + \frac{\lambda_p}{r^*} s_{14} \right) C_1^* + \left(n_1 s_{15} - \frac{\lambda_p}{r^*} s_{16} \right) C_2^* - 2\xi \left(\lambda_s^2 s_{17} + \frac{\lambda_s}{r^*} s_{18} \right) C_3^* - 2\xi \left(\lambda_s^2 s_{19} + \frac{\lambda_s}{r^*} s_{20} \right) C_4^* \right] F_1, \\ s_{13} = \frac{K_0(\lambda_p r^*)}{K_1(\lambda_p)}, \quad s_{14} = \frac{K_1(\lambda_p r^*)}{K_1(\lambda_p)}. \quad (17)$$

($s_{15} - s_{16}$ отримуємо з $s_{13} - s_{14}$ заміною функцій K_n функціями I_n , $s_{17} - s_{18}$ - з $s_{13} - s_{14}$, а $s_{19} - s_{20}$ - з $s_{14} - s_{15}$ шляхом заміни λ_p на λ_s).

Шукані переміщення і напруження знаходяться шляхом застосування до виразів (17) зворотних перетворень Фур'є та Лапласу. Кінцевий розв'язок залежить від вигляду навантаження, яке прикладене до конструкції. Як приклад розглянемо випадок, коли в початковий момент часу до оболонки прикладається зосереджене лінійне навантаження, яке потім рухається в додатному напрямку осі x зі сталою швидкістю c . У цьому випадку маємо:

$$F(x, t) = F_0 \delta(x - ct) H(t), \quad (18)$$

де $\delta(x - ct)$ - дельта-функція Дірака,

$H(t)$ - функція Хевісайда.

Якщо тут перейти до безрозмірних змінних і застосувати перетворення Фур'є і Лапласа, отримаємо:

$$F(\xi, p) = \frac{F_0}{a_2 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{p - i\xi c^*} \quad (19)$$

Підставляючи (19) у (17) та застосовуючи формули обернення перетворення Фур'є будемо мати у просторі зображень за Лапласом наступні формули для переміщень і напружень

$$U_r^* = \frac{F_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{T_1}{p^2 + \xi^2 c^{*2}} (p \cos(\xi x^*) + \xi c^* \sin(\xi x^*)) d\xi,$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{G_c} = \frac{F_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{T_2}{p^2 + \xi^2 c^{*2}} (p \cos(\xi x^*) + \xi c^* \sin(\xi x^*)) d\xi. \quad (20)$$

При оберненні перетворення Лапласа застосовується чисельний метод з використанням зміщених многочленів Лежандра [5]. Згідно з цим методом, оригінали функцій обчислюються за наступними формулами:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) a_k P_k^*(e^{-t}), \\ a_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(k)} F(i+1), \quad a_i^{(k)} = (-1)^{k+i} \binom{k}{i} \frac{(k+i)!}{k! i!}. \quad (21)$$

Інтеграли у формулах (20) знаходилися чисельно за

методом Файлона [6].

Чисельні розрахунки було проведено для випадку оболонки зі сталевими обшивками, яка знаходиться у воді. Приймалися наступні значення безрозмірних параметрів

$$\nu = \nu_c = 0,3; \rho^* = 1,5; \gamma = 125; \beta_1 = 0,05.$$

На рис. 1 показано зміну у часі нормальних контактних напружень у точці під навантаженням для різних значень безрозмірної швидкості (для кривої 1 – $c^* = 0,1$, 2 – $c^* = 0,3$, 3 – $c^* = 0,5$).

На рис. 2 для трьох моментів часу наведено зміну контактного напруження за довжиною конструкції (для кривої 1 – $\tau = 1$, 2 – $\tau = 3$, 3 – $\tau = 5$).

Отримані результати підтверджують ефективність алгоритму для аналізу перехідних процесів, які виникають у елементах складової конструкції та дозволяють обчислити ступінь перенавантаження та час встановлення і переходу до стаціонарного режиму руху.

Список літератури

1. Горшков А. Г. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок / А. Г. Горшков, В. И. Пожуев. – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 136 с.
2. Пожуев В. И. Распространение свободных волн в составной пластине с упругими связями между слоями / В. И. Пожуев, Е. Н. Михайлуца // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31. – № 2. – С. 48–55.
3. Пожуев А. В. Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень / А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2015. – № 2. – С. 108–114.
4. Пожуев В. І. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею / В. І. Пожуев, А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2016. – №1. – С. 119–126.
5. Крылов В. И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / Крылов В. И., Скобля Н. С. – М. : Наука, 1974. – 223 с.
6. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / Крылов В.И., Шульгина Л. Т. – М. : Наука, 1966. – 370 с.

Одержано 06.11.2018

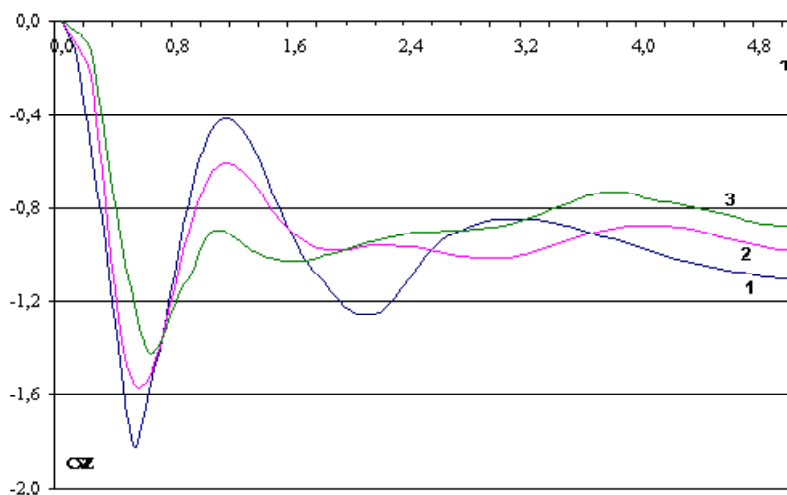


Рис. 1.

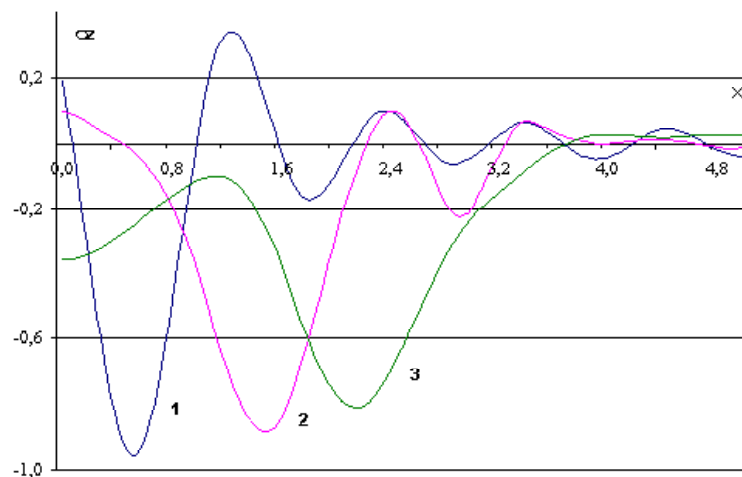


Рис. 2.

Пожуев А.В., Михайлуца Е.Н. Нестационарная реакция трехслойной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость

Цель работы. Построить математическую модель трехслойной цилиндрической оболочки с заполнителем, которая погружена в идеальную жидкость. Изучить картину нестационарной деформации конструкции под действием нагрузки, которая приложена в начальный момент времени к внутренней оболочке, а затем движется с постоянной скоростью в осевом направлении.

Методы исследования. Решение получено путем совместного применения к каждому уравнению интегральных преобразований Фурье по пространственной координате и Лапласа по времени. Для обращения интегральных преобразований используется алгоритм, который базируется на применении метода Файлона нахождения интегралов сильно осциллирующих функций. Построение оригиналов искомых величин происходило с помощью смещенных многочленов Лежандра.

Полученные результаты. Разработан численно-аналитический алгоритм совместного обращения двух интегральных преобразований. Проведено большое количество численных экспериментов для нахождения шага и верхней границы интегрирования в методе Файлона. Построены графические зависимости, которые иллюстрируют распределение компонент напряженно-деформированного состояния в разные моменты времени.

Научная новизна. Предложенный подход расширяет математические методы решения начально-краевых задач механики, в которых применяются интегральные преобразования. Исследовано время установления процесса и перехода к стационарной задаче.

Практическая ценность. Полученные результаты могут быть использованы в качестве эталонных для построения моделей тонкостенных элементов конструкций под действием ударных волн в жидкости, в частности, подводных трубопроводов.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, упругий заполнитель, динамическая нагрузка, осесимметрическая задача.

Pozhuyev A., Mikhailutsa O. Non-stationary reaction of three-layer shell immersed in a liquid

Purpose. To build a mathematical model of a three-layer cylindrical shell with a filler immersed in an ideal liquid. To study the picture of non-stationary deformation of the construction under the action of a load that is applied at the initial time to the inner shell, and then moves with a constant speed in the axial direction.

Methods of research. The solution is obtained by joint use to each equation of the Fourier integral transforms in the space coordinate and Laplace transforms in time. For the inversion of integral transformations, an algorithm is used, which is based on the application of the Fileon method of finding the integrals of oscillating functions. The construction of the originals of the quantities sought was carried out using the shifted Legendre polynomials.

Results. A numerical-analytical algorithm for the joint inversion of two integral transforms has been developed. A large number of numerical experiments were conducted to find the step and the upper limit of integration in the Fileon method. Graphic dependences were obtained that illustrate the distribution of the components of the stress-strain state at different points in time.

Scientific novelty. The proposed approach extends the mathematical methods for solving initial-boundary-value problems of mechanics, in which integral transformations are used. The time of the process establishment and transition to the stationary problem is investigated.

Practical value. The results obtained can be used as reference for building models of thin-walled structural elements under the action of shock waves in a liquid, in particular, underwater pipelines.

Key words: cylindrical shell, elastic filler, dynamic load, axisymmetric problem.
