

ДИНАМІКА КОАКСІАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК У ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Розглядаються дві коаксіальні циліндричні оболонки, які знаходяться у тривимірному пружному інерційному середовищі із вільною поверхнею, причому осі оболонок паралельні поверхні середовища. Досліджується випадок, коли оболонки розташовані на різній глибині. Вивчається випадок, коли по внутрішній поверхні однієї оболонки рівномірно діє імпульсивне нормальне навантаження. Досліджується взаємний вплив коаксіальних оболонок та поверхні середовища. Проведено аналіз впливу глибини залягання оболонок від поверхні середовища на напружено-деформований стан такої механічної системи.

Ключові слова: пружне середовище, тонка циліндрична оболонка, коаксіальні оболонки, вільна поверхня середовища, метод скінченних елементів.

Вступ

На сьогодні важливою практичною задачею є моделювання динамічних процесів у системі середовище з вільною поверхнею – дві коаксіальні циліндричні порожнини, які підкріплені тонкими пружними оболонками. До такої розрахункової схеми приводять задачі моделювання трубопроводів, тунелів метрополітену та ін. Тому дослідження динамічного НДС розглянутої механічної системи є актуальною задачею.

До цього часу досить добре досліджені динамічні задачі для однієї циліндричної оболонки, що розташована у необмеженому середовищі. Даним задачам у стаціонарній постановці присвячена монографія [1]. У нестационарній постановці подібні задачі розглядаються в роботах [2, 3], причому в роботі [2] розглядається невісесиметричний випадок, а в роботі [3] – вісесиметричний.

В роботах [4, 5] розглянуто взаємний вплив оболонок та поверхні середовища при динамічних навантаженнях. Причому, в роботі [4] динамічне навантаження діє на ділянку внутрішньої поверхні оболонки, а поверхня середовища – вільна від навантажень. В роботі [5] динамічне навантаження діє на ділянці поверхні середовища, а внутрішня поверхня оболонки – вільна від навантажень. В обох роботах задача розв'язана МСЕ.

В даній роботі розглядаються дві коаксіальні циліндричні порожнини, які підкріплені тонкими пружними оболонками у пружному середовищі із вільною поверхнею. Припускається, що оболонки розташовані на різних глибинах. Розглядається випадок, коли динамічне навантаження прикладене до внутрішньої поверхні однієї оболонки та рівномірно по нормалі до цієї поверхні, та залежить від часу як одинична функція Хевісайда. Інша оболонка та поверхня середовища вільні від поверхневих навантажень. Науковою новизною ро-

боти є врахування взаємного впливу двох коаксіальних оболонок та вільної поверхні пружного середовища, при різній глибині залягання оболонок, на динамічний НДС розглянутої механічної системи. Ціль роботи – вивчити залежність величини взаємного впливу оболонок, а також дослідити взаємний вплив коаксіально-розташованих оболонок та вільної поверхні.

Постановка задачі

Розглядається лінійно-пружне, однорідне та ізотропне середовище з вільною поверхнею. Середовище містить дві коаксіальні циліндричні порожнини, які підкріплені тонкими оболонками та розташовані на різній глибині. Припускається, що площина вільної поверхні середовища паралельна осям циліндричних порожнин. Вивчається випадок, коли до внутрішньої поверхні однієї з оболонок прикладене нормальне динамічне навантаження, що рівномірно розподілене по внутрішній поверхні цієї оболонки та залежать від часу, як одинична функція Хевісайда. Внутрішня поверхня іншої оболонки та поверхня середовища вільна від навантажень. Нехай оболонки та середовище віднесені до нерухомої декартової системи координат $\{x, y, z\}$. Внутрішня поверхня першої оболонки задається рівнянням $x^2 + y^2 = b^2$, а другої – $(x - q_1)^2 + (y - q_1)^2 = b^2$. Аналогічно поверхні контакту між середовищем та оболонками – $x^2 + y^2 = a^2$ та $(x - q_1)^2 + (y - q_2)^2 = a^2$ ($h = a - b$ – товщина оболонок). Контакт між оболонкою та середовищем вважаємо жорстким. Площина, що обмежує середовище задається рівнянням $y = L (L > a)$. В момент часу $t < 0$ оболонки та середовища знаходяться в стані спокою та вільні від напру-

жень. Потім в момент часу $t = 0$ прикладається імпульсивне навантаження, яке діє по нормалі до внутрішньої поверхні однієї з оболонок.

Слід зазначити, що в даній роботі приймається, що навантаження, яке діє на внутрішню поверхню однієї з оболонок рівномірно розподілене за її довжиною, тобто не залежить від змінної z , тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності.

Початкові умови приймаються нульовими, тобто всі шукані величини та їх перші похідні за змінною часу при $t = 0$ дорівнюють нулю.

Задачу будемо розв'язувати у безрозмірних величинах:

$$\begin{aligned} \{U_x^{(k)}, U_y^{(k)}\} &= \frac{1}{a} \{u_x^{(k)}, u_y^{(k)}\}, \\ \{\bar{\sigma}_{xx}^{(k)}, \bar{\sigma}_{yy}^{(k)}, \bar{\sigma}_{xy}^{(k)}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}\}; F = \frac{f}{G_2}; \\ \{x_*, y_*\} &= \frac{1}{a} \{x, y\}; \{q_{1*}, q_{2*}\} = \frac{1}{a} \{q_1, q_2\}; \tau = \frac{c_s}{a} t; \\ \kappa &= \frac{h}{a}; \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \\ d_1 &= 1 - \kappa; c_s = \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{\rho_2}}; L_* = \frac{L}{a}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $u_x^{(k)}, u_y^{(k)}$ – відповідні компоненти вектора переміщень точок оболонок ($k = 1$) и середовища ($k = 2$);

$\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}$ – відповідні компоненти навантажень;

G_k, ρ_k – модулі зсуву та густина; F – динамічне поверхневе нормальне навантаження.

Задачу будемо розв'язувати МСЕ. Для цього перейдемо до варіаційної постановки задачі.

Варіаційна постановка задачі

Перейдемо тепер до варіаційної постановки задачі.

Нехай $\delta U^{(k)} = (\delta U_x^{(k)}, \delta U_y^{(k)})$ – додаткові можливі безрозмірні переміщення точок тіла Ω .

Тоді $\delta \varepsilon^{(k)} = (\delta \varepsilon_{xx}^{(k)}, \delta \varepsilon_{yy}^{(k)}, \delta \varepsilon_{xy}^{(k)})$ – можливі безрозмірні деформації, які відповідають можливим переміщенням

$\delta U^k = (\delta U_x^{(k)}, \delta U_y^{(k)})$, та задаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} &= \frac{\partial (\delta U_x^{(k)})}{\partial x_*}, \delta \varepsilon_{yy}^{(k)} = \frac{\partial (\delta U_y^{(k)})}{\partial y_*}, \\ \delta \varepsilon_{xy}^{(k)} &= \frac{\partial (\delta U_x^{(k)})}{\partial y_*} + \frac{\partial (\delta U_y^{(k)})}{\partial x_*}. \end{aligned}$$

Нехай тіло знаходиться у рівновазі під дією поверхневих сил F та внутрішніх сил R . Причому поверхневі сили діють на поверхні

$$\omega = \left\{ (x_*, y_*) \in R^2 \mid (x_* - q_{*1})^2 + (y_* - q_{*2})^2 = d_1^2 \right\}$$

$$\cup \left\{ (x_*, y_*) \in R^2 \mid x_*^2 + y_*^2 = d_1^2 \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (x_*, y_*) \in R^2 \mid y_* = L_* \right\}$$

що обмежує тіло Ω , а внутрішні всередині області Ω . Розглянемо тепер варіаційне рівняння Лагранжа [12]:

$$\delta \bar{V}^{(k)} = 0, \quad (2)$$

де $\bar{V}^{(k)} = \bar{U}^{(k)} + \Pi^{(k)}$ – повна безрозмірна потенціальна енергія оболонки та півпростору, що оточує оболонку. Перетворимо вираз (2) наступним чином:

$$\delta \bar{V}^{(k)} = \delta (\bar{U}^{(k)} + \Pi^{(k)}) = \delta \bar{U}^{(k)} + \delta \Pi^{(k)},$$

де

$$\delta \bar{U}^{(k)} = \iint_{\Omega} (\bar{\sigma}_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \bar{\sigma}_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \bar{\sigma}_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) d\Omega, \quad (3)$$

$$\Pi^{(k)} = - \iint_{\omega} (\delta U^{(k)})^T F d\omega - \iint_{\Omega} (\delta U^{(k)})^T R d\Omega. \quad (4)$$

Вираз (3) є варіацією безрозмірної енергії деформації, а (4) – варіація безрозмірної роботи зовнішніх сил. Тоді, згідно до варіаційного принципу Лагранжа [6] потрібно знайти такі значення переміщень $\delta U^{(k)}$, для яких повна енергія системи мінімальна, тобто такі переміщення, які задовольняють варіаційному рівнянню Лагранжа (2).

Розв'язок задачі МСЕ

Для розв'язку задачі МСЕ спочатку проведемо дискретизація тіла. Для цього розіб'ємо це тіло на трикутники. Спочатку припускаємо, що центри обох оболонок розташовані на осі Ox_* . Далі проводимо триангуляцію розглянутої області. При розбитті на трикутники для середовища та оболонки використовуються різні елементи. Також розбиття середовища на трикутники проводиться таким чином, що при наближенні до границі контакту з оболонкою відбувається згущення сітки. На основі результатів, отриманих в [7], будемо припускати, що на відстані понад 25 радіусів від границі контакту оболонки із середовищем переміщення останнього дорівнюють нулю. Тому при дискретизації залишаємо лише ті елементи, які знаходяться від центра оболонки на відстані не більше 26 радіусів. Потім виконуємо поворот отриманої сітки за годинниковою стрілкою відносно початку координат на кут:

$$\alpha = \arcsin \frac{q_{1*}}{\sqrt{q_{1*}^2 + q_{2*}^2}}, \quad (5)$$

де (q_{1*}, q_{2*}) – координати центра другої оболонки, $\sqrt{q_{1*}^2 + q_{2*}^2}$ – відстань між центрами оболонок. Після цього, в отриманій сітці, залишаємо лише ті елементи, які задовольняють нерівності $y_* \leq L_*$ (L_* – глибина залягання першої оболонки). Далі коригуємо отриману сітку таким чином, щоб верхня границя області мала рівняння $y_* = L_*$.

Потім, на основі отриманої дискретизації тіла, будемо безрозмірні матриці жорсткості та мас та вектор еквівалентних вузлових навантажень за співвідношеннями описаними в роботі [4]. Диференціальне матричне рівняння, яке моделює динамічну задачу, розв'язується θ -методом Вілсона [8], який зводить початкову задачу до ітераційної послідовності квазістатичних задач. Оскільки матриці систем лінійних алгебраїчних рівнянь для статичної та квазістатичної задачі є симетричними та додатково визначеними [8, 9], тому для розв'язку цих систем було застосовано метод спряжених градієнтів, алгоритм якого наведено в роботі [4].

Результати чисельного аналізу

Розглянемо випадок, коли у момент часу $\tau = 0$ прикладається імпульсивне навантаження $F(x_*, y_*, \tau) = F(x_*, y_*)H(\tau)$, яке діє по нормалі до внутрішньої поверхні однієї з оболонок та залежить від часу як одинична функція Хевісайда.

Розрахунки, зокрема формування матриць твердості та мас, було проведено для таких значень безрозмірних величин:

$$\kappa = 0,02; \gamma = 30; \rho^* = 4; d_1 = 1 - \kappa = 0,98.$$

Величини $x_*, y_*, \tau, L_*, q_{*1}, q_{*2}$ – змінювались.

Спочатку розглянемо випадок, коли $L_* = 2, q_{*1} = 3,873, q_{*2} = 1$, тобто оболонка, внутрішня поверхня якої навантажена, знаходиться на глибині один радіус, інша оболонка – два радіуса. Відстань між оболонками дорівнює 2 радіуса.

Зазначимо, що на всіх рисунках: крива 1 – статичний розв'язок, крива 2 при $\tau = 0,75$, 3 – $\tau = 1,5$, 4 – $\tau = 2,5$.

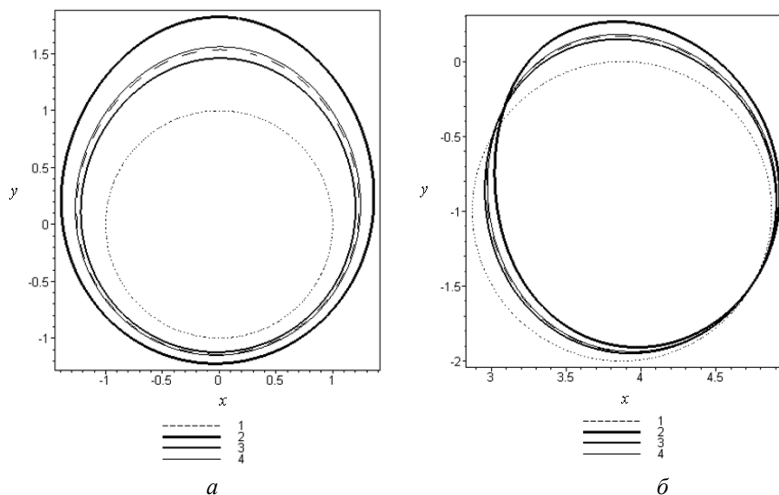


Рис. 1. Переміщення границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

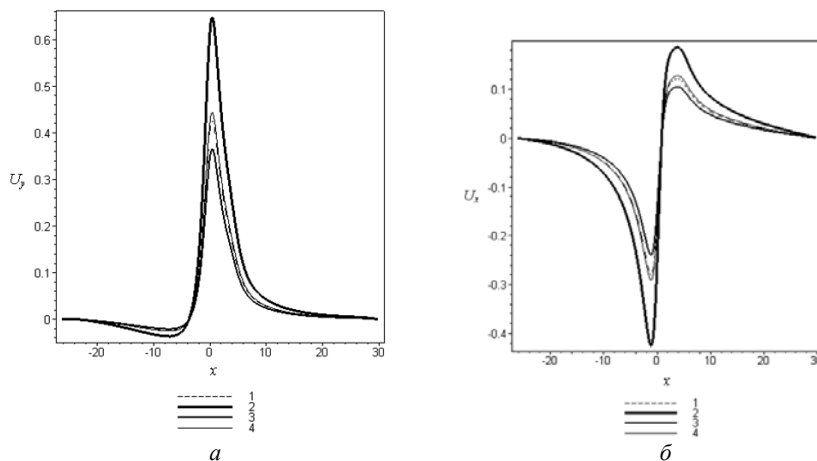


Рис. 2. Переміщення поверхні середовища в різні моменти часу, при $L_* = 2, q_{*1} = 3,873, q_{*2} = 1$

На рис. 1 зображені переміщення границі контакту оболонок із середовищем для навантаженої оболонки (рис. 1а), та оболонки вільної від навантажень (рис. 1б). Точками зображено початкове положення границі контакту (тобто до навантаження).

На рис. 2 зображені переміщення поверхні середовища, причому випадок а) – U_y , випадок б) – U_x .

На рис. 3–5 зображені напруження середовища за кутовою координатою на границі контакту оболонок із середовищем, причому випадок а) – навантажена оболонка, випадок б) – оболонка вільна від навантажень.

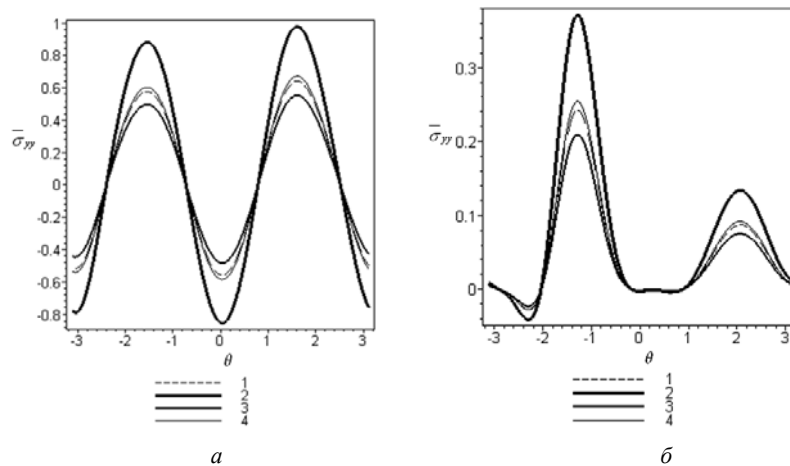


Рис. 3. Напруження $\bar{\sigma}_{yy}$ середовища на границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

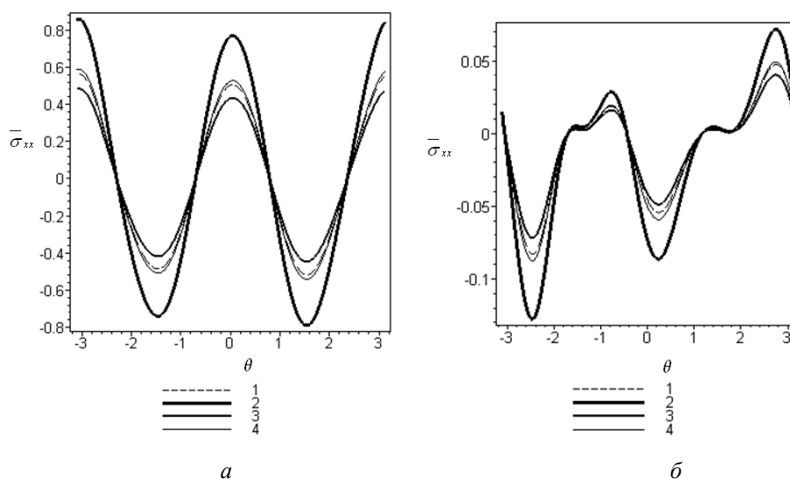


Рис. 4. Напруження $\bar{\sigma}_{xx}$ середовища на границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

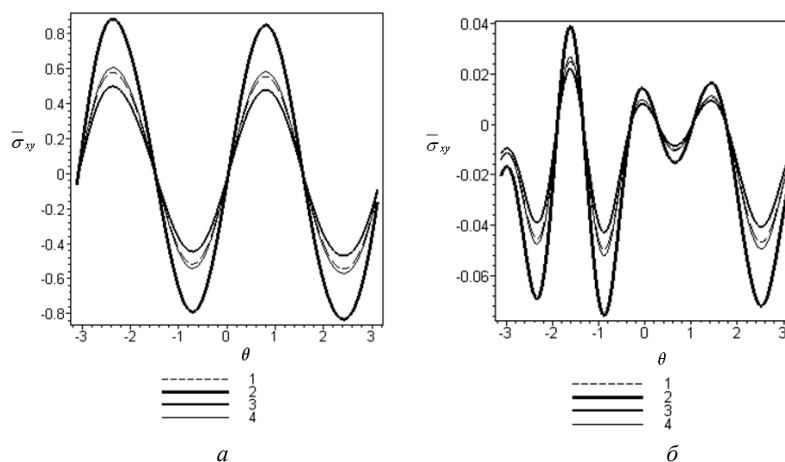


Рис. 5. Напруження $\bar{\sigma}_{xy}$ середовища на границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

Тепер розглянемо випадок, коли $L_* = 2, q_{*1} = 3,464, q_{*2} = 2$, тобто оболонка, внутрішня поверхня якої навантажена, знаходиться на глибині один радіус, інша оболонка – три радіуса. Відстань між оболонками дорівнює 2 радіуса.

На рис. 6 зображені переміщення границі контакту оболонок із середовищем для навантаженої оболонки (рис. 6а), та оболонки вільної від навантажень (рис. 6б).

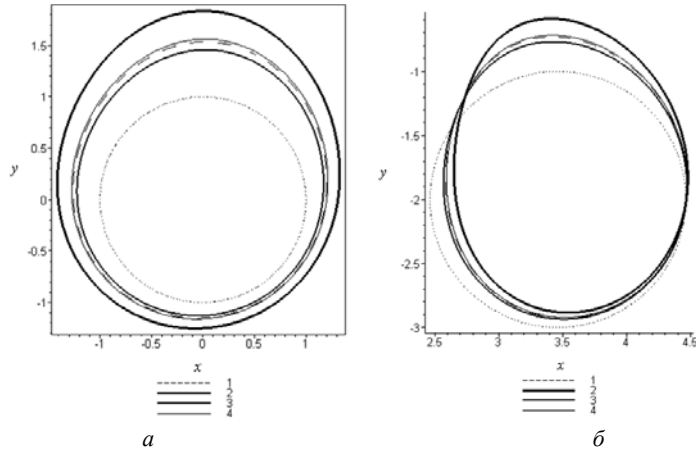


Рис 6. Переміщення границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

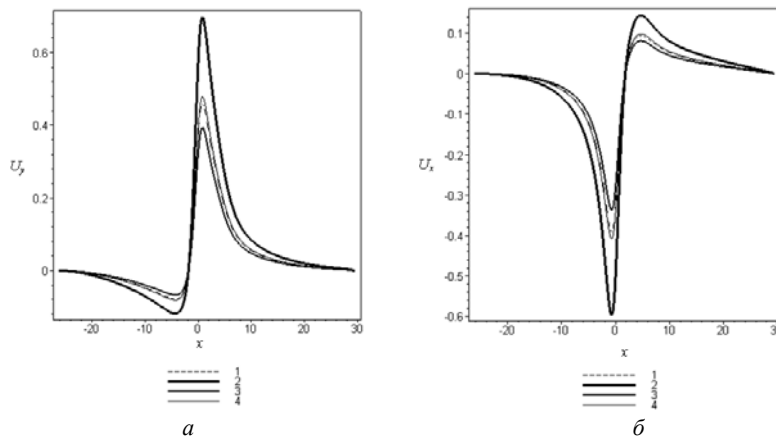


Рис. 7. Переміщення поверхні середовища в різні моменти часу, при $L_* = 2, q_{*1} = 3,464, q_{*2} = 2$

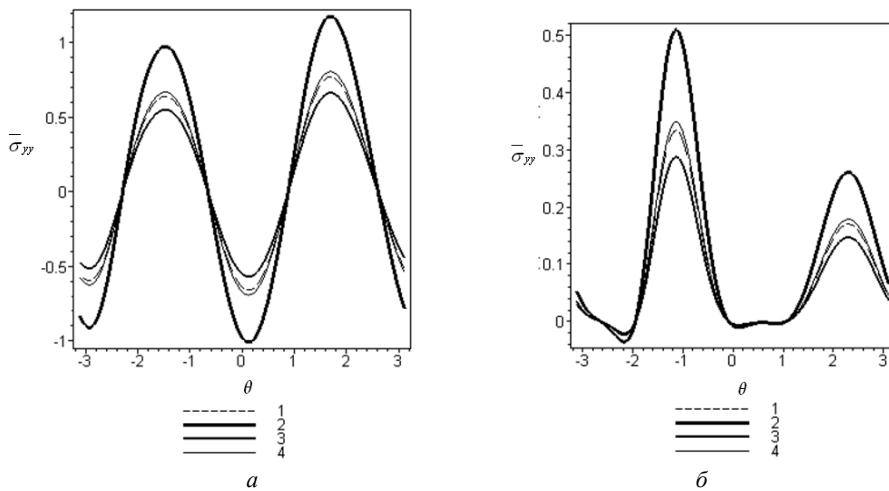


Рис 8. Напруження σ_{yy} середовища на границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

Точками зображено початкове положення границі контакту (тобто до навантаження).

На рис. 7 зображені переміщення поверхні середовища, причому випадок а) – U_y , випадок б) – U_x .

На рис. 8–10 зображені напруження середовища за кутовою координатою на границі контакту оболонок із середовищем, причому випадок а) – навантажена оболонка, випадок б) – оболонка вільна від навантажень.

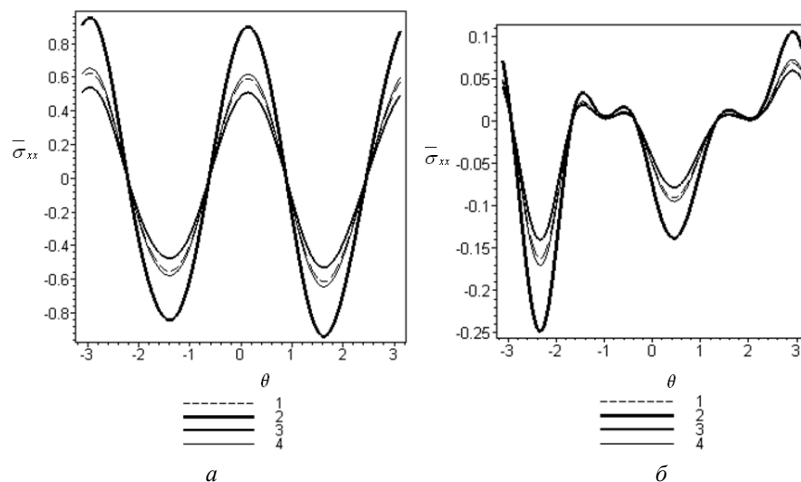


Рис. 9. Напруження $\bar{\sigma}_{xx}$ середовища на границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

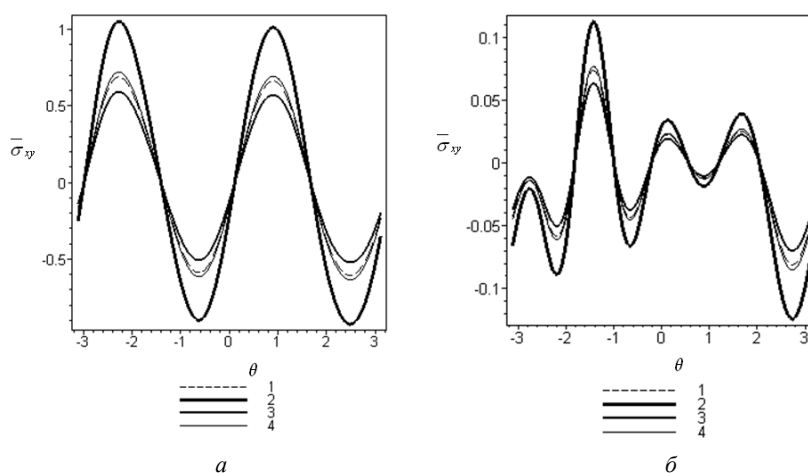


Рис. 10. Напруження $\bar{\sigma}_{xy}$ середовища на границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

Тепер розглянемо випадок, коли $L_* = 4, q_{*1} = 3,873, q_{*2} = 1$, тобто оболонка, внутрішня поверхня якої навантажена, знаходиться на глибині три радіуси, інша оболонка – чотири радіуса. Відстань між оболонками дорівнює 2 радіуса.

На рис. 11 зображені переміщення границі контакту

оболонки із середовищем для навантаженої оболонки (рис. 11а), та оболонки вільної від навантажень (рис. 11б). Точками зображено початкове положення границі контакту (тобто до навантаження).

На рис. 12 зображені переміщення поверхні середовища, причому випадок а) – U_y , випадок б) – U_x .

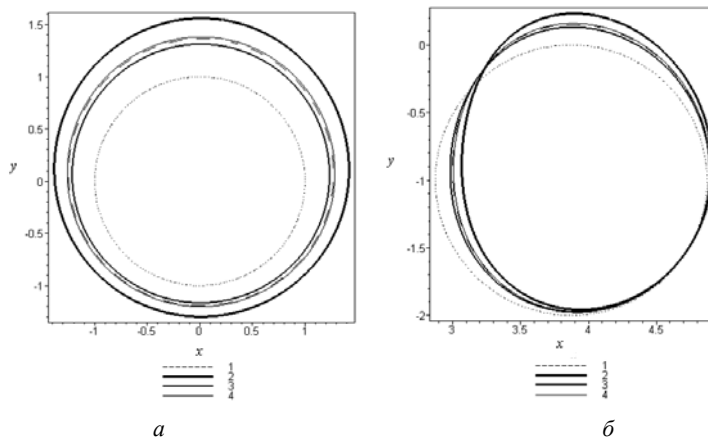


Рис. 11. Переміщення границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

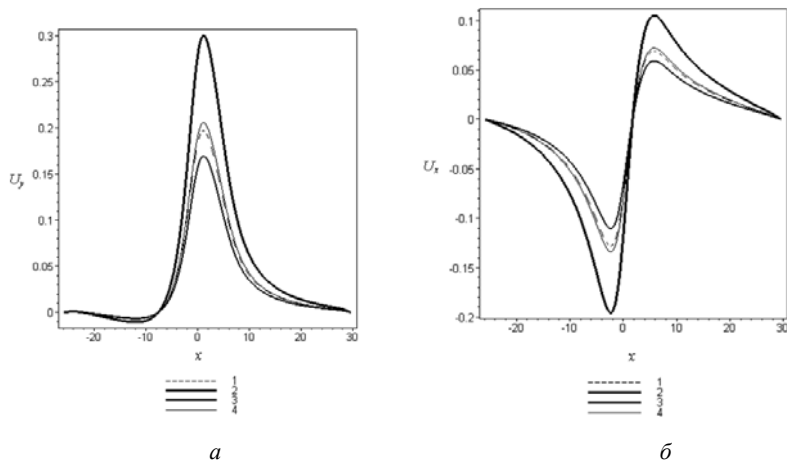


Рис. 12. Переміщення поверхні середовища в різні моменти часу, при $L_* = 4, q_{*1} = 3,873, q_{*2} = 1$

Тепер розглянемо випадок, коли $L_* = 4, q_{*1} = 3,464, q_{*2} = 2$, тобто оболонка, внутрішня поверхня якої навантажена, знаходиться на глибині три радіуса, інша оболонка – чотири радіуса. Відстань між оболонками дорівнює 2 радіуса.

На рис. 13 зображені переміщення границі контакту оболонок із середовищем для навантаженої оболонки

(рис. 13а), та оболонки вільної від навантажень (рис. 13б). Точками зображено початкове положення границі контакту (тобто до навантаження).

На рис. 14 зображені переміщення поверхні середовища, причому випадок а) – U_y , випадок б) – U_x .

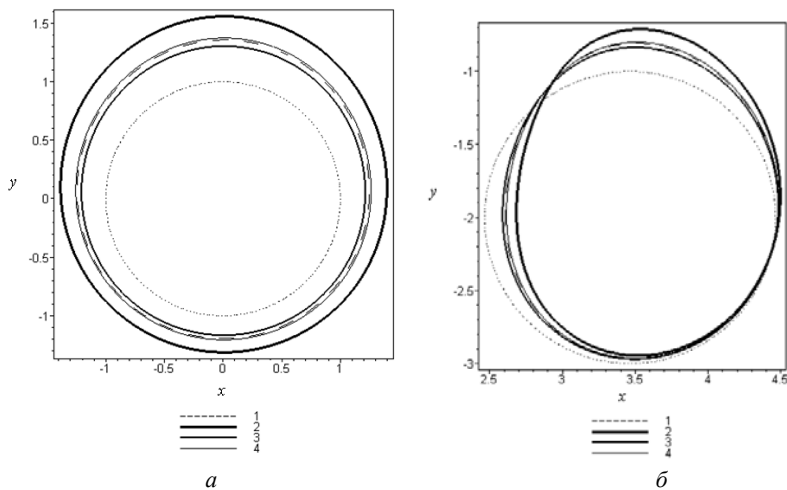


Рис. 13. Переміщення границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу

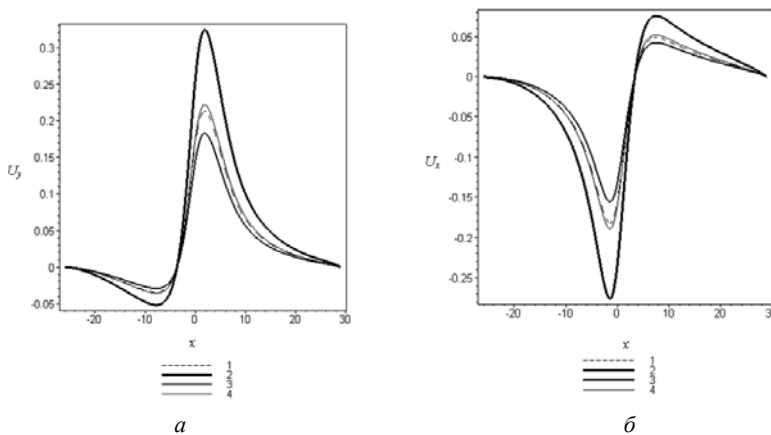


Рис. 14. Переміщення поверхні середовища в різні моменти часу, при $L_* = 4, q_{*1} = 3,464, q_{*2} = 2$

Висновки

Отримано розв'язок динамічної задачі для пружного середовища із вільною поверхнею з двома коаксіальними порожнинами, які підкріплені тонкими оболонками та розташовані на різній глибині. Розв'язок задачі отримано МСЕ. Проаналізовано вплив відстані між оболонками на динамічний НДС розглянутої системи. Також досліджено вплив вільної поверхні на розглянуту механічну систему. Отримані результати можуть бути застосовані при проектуванні та експлуатації підземних конструкцій, зокрема трубопроводів, тунелів метрополітену тощо.

Список літератури

1. Горшков А. Г. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок / А. Г. Горшков, В. И. Пожуев – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 136 с.
2. Пожуев А. В. Нестационарна невисесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень / А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2016. – №1. – С. 108–114.
3. Пожуев А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються / А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 200–213.
4. Пожуев В. І. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею / В. І. Пожуев, А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2016. – № 1. – С. 119–126.
5. Пожуев В. І. Динаміка пружного півпростору з циліндричною порожниною, підкріпленою оболонкою, при поверхневих навантаженнях / В. І. Пожуев, А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк А. В. // Проблеми обчислюваної механіки і міцності конструкцій. Випуск 26. – 2017. – С. 142–152.
6. Образцов И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов – М. : Высшая школа, 1985. – 393 с.
7. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль. – М. : Высшая школа, 1982. – 264 с.
8. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд – М. : Мир, 1979. – 393 с.

Одержано 17.07.2017

Пожуев В.И., Пожуев А.В., Фасоляк А.В. Динамика коаксиальных цилиндрических оболочек в упругой среде со свободной поверхностью

Рассматриваются две коаксиальные цилиндрические оболочки, которые расположены в трехмерной упругой среде со свободной поверхностью, причем оси оболочек параллельны поверхности среды. Исследуется случай, когда оболочки расположены на разной глубине. Изучается случай, когда по внутренней поверхности одной оболочки действует импульсивные нормальные нагрузки. Исследуется взаимное влияние коаксиальных оболочек и поверхности среды. Проведен анализ влияния глубины заложения оболочек от поверхности среды на напряженно-деформированное состояние такой механической системы.

Ключевые слова: упругая среда, тонкая цилиндрическая оболочка, коаксиальные оболочки, свободная поверхность среды, метод конечных элементов.

Pozhuev V., Pozhuev A., Fasoliak A. Dynamics of coaxial cylindrical shells in an elastic medium with a surface

Two coaxial cylindrical shells, which are located in a three-dimensional elastic medium with a surface and the shell axes parallel to the surface of the medium, are considered. The case, when shells are located on the different depth, is investigated. Case, when impulsive normal loads are acted on the inner surface of one shell, is studied. Cross coupling of coaxial shells and surface of the media is investigated. The influence of the depth of the shells from the surface of the medium on the stress-strain state of such a mechanical system is analyzed.

Key words: elastic media, thin cylindrical shell, coaxial shells, surface of the media, finite element method.